

Інтеграл Пуассона –Чебишева

Анотація

У роботі було досліджено поліном Чебешева, задача Діріхле. На основі цього було виведено інтеграл Пуассона-Чебишева.

Ключові слова: поліном, інтеграл, диференціальне рівняння.

Abstract

In the paper Chebyshev's polynomial, Dirichlet's task were studied. Based on if the the Poisson-Chebyshev integral was deduced.

Keywords: polynomial, integral, differential equation

Розглянемо питання знаходження в H_{n-1} (множина усіх поліномів степеня n зі старшим коефіцієнтом рівним 1) поліном $P(x)$, який найменше відхиляється від функції $f(x) = x^n$ на сегменті $[-1, 1]$. Якщо шуканий поліном $P(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + r$, покладемо:

$$\tilde{R}(x) = x^n - (ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + r) \quad (1)$$

тому знаходження полінома зводиться до підбору коефіцієнтів $a, b, \dots, r$, щоб величина $M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{R}(x)|$ мала найменші значення [1, ст.61]. У формулі (1) можна записати будь-який поліном старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці, величина M є відхилення цього полінома від нуля. Тому задача зводиться до відшукування зі всіх поліномів зі степенем n зі старшими коефіцієнтами, що рівні одиниці, найти той, що має найменше відхилення на даному сегменті.

Означення: Поліном виду

$$\tilde{T}_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (2)$$

називається поліном Чебишева першого роду.

Властивості многочлена Чебишева:

- ортогональність по відношенню до відповідного скалярного добутку, з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- серед всіх многочленів, значення яких знаходиться на $[-1; 1]$ не перевищує по модулю 1, поліном має:
 - найбільший старший коефіцієнт;
 - найбільше значення у довільній точці.
- нулі полінома Чебишова є оптимальними вузлами інтерполяційних схем [2].

Обчислення $T_n(x)$ для $x \in [-1; 1]$ зручно робити так:

1. Знайти на $[0; \pi]$ такий кут θ , що $\cos \theta = x$.
2. Обчислити $T_n(x) = \cos \theta$.

Многочлени Чебишева дають розв'язок поставленої задачі.

Теорема. Із всіх поліномів степеня n , зі старшими коефіцієнтами, які дорівнюють одиниці, що найменше відхиляється від нуля на сегменті $[-1; 1]$ поліном

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cos^{-1} x) \quad [1, \text{ст.63}].$$

Розв'яжемо тепер задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі. Нехай для гармонічної в крузі функції $U(r, \varphi)$ встановлені умов рівності на границі функції $\mu(\varphi)$:

$$U(R, \varphi) = \mu(\varphi) \quad (3)$$

$$U(R, \varphi) = \mu(\varphi) \quad (4)$$

де $\mu(\varphi)$ – задана функція, φ – полярний кут. Задача полягає у знаходженні в H_{n-1} поліном $P(x)$, який найменше відхиляється від функції $f(x) = x^n$ на сегменті $[-1, 1]$ [3].

Запишемо задачу Діріхле в полярній системі (ρ, φ) , яка дозволить застосувати метод Фур'є для знаходження розв'язку цієї задачі.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді: $U(\rho, \varphi) = R(\rho) * \Phi(\varphi) \neq 0$.

Підставивши формулу в рівняння (5), можна показати, що ми отримаємо два диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} \rho^2 \left(P''(\rho) + \frac{1}{\rho} P'(\rho) \right) = \lambda P(\rho), P \neq 0, \\ \Phi'(\varphi) = -\lambda \Phi(\varphi), \Phi \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda = q^2$, $q \in \mathbb{Z}$. Тоді розв'язок другого рівняння системи (6)

$$\Phi(\varphi) = A \cos(q\varphi) + B \sin(q\varphi).$$

Тепер розглянемо перше рівняння системи (6):

$$\rho^2 (P''(\rho) + \frac{1}{\rho} P'(\rho)) = q^2 P(\rho) \quad (7)$$

Функцію $P(\rho)$ будемо шукати у вигляді $P(\rho) = \rho^2$, підставивши її у рівняння (7), отримаємо розв'язок рівняння: $P(\rho) = C\rho^q + D\rho^{(-q)}$ де C і D – константи.

Поклавши $D = 0$, отримаємо частковий розв'язок задачі:

$$U(\rho, \varphi) = (A \cos(q\varphi) + B \sin(q\varphi)) C \rho^q$$

Крім того, при $\lambda = 0$ отримаємо розв'язок $U_0(\rho, \varphi) = \text{const}$, який ми позначимо $\frac{A_0}{2}$.

$$U(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \rho^n = \mu(\varphi) \quad (8)$$

Так як μ задана як функція кута φ , розкладемо її в ряд Фур'є і підставивши вирази для коефіцієнтів Фур'є у формулу (8), отримаємо:

$$U(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\theta) d\theta \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)} \quad (9)$$

де $\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)}$ – ядро Пуассона [3].

Враховуючи властивості полінома Чебишева та інтегральну формулу Пуассона ми запишемо інтеграл Пуассона-Чебишева:

$$P_\rho(f, T, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) (P(\rho, t + y) + P(\rho, t - y)) dt, \text{ де } y = \cos^{(-1)} x, ,$$

$\hat{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \cos^{-1} x, k \in N$ – ортонормована з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система поліномів

Чебишева з коефіцієнтами Фур'є функції $f, c_k = \int_{-1}^1 \frac{f(t) \hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, а $P(\rho, u) = \frac{(1-\rho^2)}{2(1-2\rho \cos u + \rho^2)}$ -

гармонійне ядро Пуассона. Апроксимативні властивості якого були досліджені в роботах [4], [5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 688 с.
2. Васильев Н., Зелевинский А., Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения, Квант, № 1, 1982.
3. Гембарська С.В. Дослідження властивостей граничних значень аналітичних і бігармонійних функцій в одиничному крузі. К., 2003.-16с.
4. Zhyhallo K.M., Kharkevych Y.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 1. – P. 86-98.
5. Жигалло К.М. Харкевич Ю.І. Наближених спряжених диференційованих функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона //Укр. Мат. Ж. – **61**, №1. – С. 73-82.

Жаловага Юлія Леонідівна — студентка групи Матем-31, факультет інформаційних систем, фізики та математики, Східноєвропейський національний університет, Луцьк, e-mail: zhalovagajulia16@gmail.com

Zhalovaha Juliia L. — Department of of Information Systems, Physics and Mathematics, Lesya Ukrainka East European National University, Lutsk, , email : zhalovagajulia16@gmail.com