

## ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ: МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

### Анотація

В статті розглядається спочатку часткову модель, що описує процеси нагромадження і забування знань з певного навчального предмета за технологією навчання, яку називаємо "традиційною". Також в моделі розглядаються особливості, властиві інноваційним технологіям навчання. Для цього вводиться величина "інноваційних" знань студента, володіння якими підвищує ефективність його самостійної роботи із засвоєння знань. Будемо вважати, що швидкість приросту знань з певного навчального предмета, одержуваних самостійно, пропорційна об'єму "інноваційних" знань. Експериментальні дослідження, говорять про те, що інноваційна технологія може давати кращі результати за рівнем знань, який вимірюється традиційними тестами, уже через два роки. Ще через два роки переваги інноваційної технології стануть цілком очевидними.

*Ключові слова:* модель, технології навчання, студент, викладач, "інноваційні" знання, традиційні тести.

### Abstract

In the article, we first consider a partial model that describes the processes of accumulation and forgetting of knowledge on a particular subject on the technology of learning, which we call "traditional". Also, the model considers the peculiarities inherent in innovative learning technologies. To this end, the value of the "innovative" knowledge of the student is introduced, the ownership of which increases the efficiency of his independent work on the acquisition of knowledge. We will assume that the rate of growth of knowledge from a certain subject, obtained independently, is proportional to the volume of "innovative" knowledge. Experimental research suggests that innovative technology can yield better results by level of knowledge, measured by traditional tests, in two years. In another two years, the benefits of innovative technology become quite obvious.

*Key words:* model, learning technology, student, teacher, "innovative" knowledge, traditional tests.

Перехід усякої науки з емпіричного рівня на теоретичний різко прискорює темпи її розвитку. Теоретичні побудови висвітлюють шлях подальшим дослідженням, роблять їх усвідомленими, цілеспрямованими. Але найчастіше перехід на теоретичний рівень обмежується недостатньою розробленістю методів правильного виведення наслідків з постулатів, покладених в основу створюваної теорії.

Теорія виправдовує своє існування лише в тому разі, якщо дає змогу з невеликого числа тверджень, які беруться як постулати, одержувати в результаті умовиводів пояснення уже відомих експериментальних фактів і явищ, а також прогнозувати існування нових. Саме правильне передбачення нових фактів і явищ дає можливість віддати перевагу одній з альтернативних теорій, якщо вони розходяться у висновках щодо деякого питання. Якщо ж експеримент не підтверджує висновків теорії, то підлягають перегляду її постулати. При такому підході передбачається, що сам процес одержання наслідків з першопринципів бездоганний. Звичайно, у реальній науковій практиці зустрічаються помилки й у самому ході логічних умовиводів. Але таких помилок тим менше, чим краще розроблений апарат одержання правильних висновків з вихідних посилок.

Таким апаратом є математика. Застосування її методів дозволило практично всі знання людства про світ сконцентрувати в декількох фундаментальних теоріях, кожна з яких будується на відносно малому числі основних принципів.

Гуманітарні науки, що у меншій мірі користуються математикою, мають багато локальних теорій (що описують невелике коло явищ), кожна з яких містить порівняно багато постулатів, причому часто не дуже чітко виділених. Однак принципове значення має той факт, що саме математика дозволяє формальним способом одержувати наслідки, дуже віддалені від вихідних посилок. Як зазначають вчені, математика дає можливість не тільки кількісно уточнювати результат, що інтуїтивно передбачається, але й одержувати зовсім несподівані висновки, прийти до яких навіть на якісному рівні без математики практично неможливо. Використання математики — це своєрідне підключення до попереднього досвіду всього людства.

Розглянемо спочатку часткову модель, що описує процеси нагромадження і забування знань з певного навчального предмета за технологією навчання, яку назовемо "традиційною". Нехай, для простоти, знання, уміння і навички з деякого навчального предмета (далі для стислості викладу названі просто знаннями) засвоюються студентом із постійною швидкістю  $V_0$ . Нехай уже

накопичені знання розпадаються (забуваються) із швидкістю, пропорційною їхньому об'єму  $X$ . Коефіцієнт пропорційності будемо вважати сталим. Він, як і швидкість засвоєння, залежить від індивідуальних особливостей учня і від специфіки навчального матеріалу. Його зручно вибрати у вигляді  $1/\tau$ , де  $\tau$ — характерний час забування.

Тоді процес зміни об'єму нагромаджених знань описується лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dX}{dt} = V_0 - \frac{X}{\tau}. \quad (1)$$

Тепер спробуємо відбити в моделі особливості, властиві інноваційним технологіям навчання. Для цього введемо величину  $Y$ — об'єм „інноваційних” знань студента, володіння якими підвищує ефективність його самостійної роботи із засвоєння знань. Будемо вважати, що швидкість приросту знань з певного навчального предмета, одержуваних самостійно, пропорційна об'єму „інноваційних” знань. Коефіцієнт пропорційності  $f$  будемо вважати також сталим, де  $f$  — частота засвоєння „інноваційних” знань [1, с.263].

Нехай сумарна швидкість формування „традиційних” знань і „інноваційних” знань залишається такою, що дорівнює  $V_0$ . Різноманітні технології навчання можуть відрізнятися одна від одної співвідношенням зусиль викладача і студента, що витрачаються на формування „інноваційних” знань і „традиційних” знань. У нашій моделі це співвідношення описується коефіцієнтом  $k$  таким чином, що швидкість формування „інноваційних” знань дорівнюватиме  $kV_0$ , а „традиційних” знань —  $(1 - k)V_0$ .

Як зазначено вище, що інтенсивність забування „традиційних” знань, отриманих у процесі навчання, характеризується коефіцієнтом  $1/\tau$ , забування ж „інноваційних” знань не відбувається (наприклад, у силу того, що студент постійно користується ними як інструментом самонавчання).

Сукупність описаних процесів зміни об'ємів нагромаджених „інноваційних” знань і „традиційних” знань описується диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= kV_0, \\ \frac{dX}{dt} &= (1 - k)V_0 + fY - \frac{X}{\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Нехай початкові умови, для визначеності, такі:

$$X(0)=0, Y(0)=0. \quad (3)$$

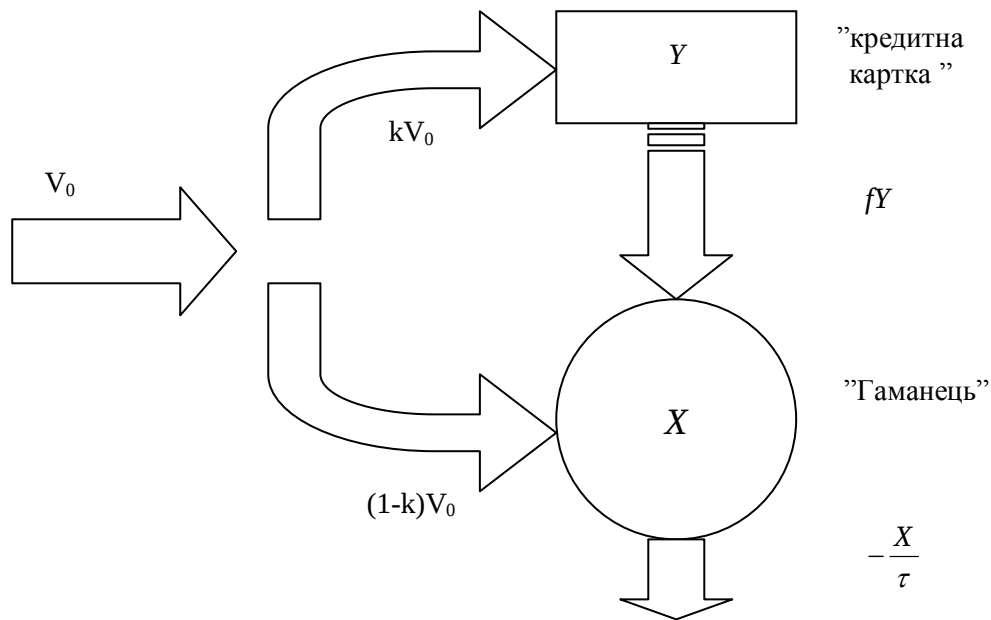
Наше попереднє дослідження показало, що одержання правильних умовиводів на основі навіть такої примітивної моделі викликає значні труднощі не тільки у педагогів-практиків, але й у людей, які професійно займаються дидактикою як наукою. З іншого боку, використання математичного апарату, аналогій і комп'ютерних програм робить цю операцію посильною в деяких випадках навіть для старшокласників.

*Фінансова аналогія.* Нехай  $X$ — кількість грошей у гаманці (аналог „традиційних” знань),  $V_0$  відповідає розміру прибутку в одиницю часу. "Рекет" (або податок), зменшує  $X$  зі швидкістю, пропорційною наявній кількості грошей у гаманці. Коефіцієнт пропорційності  $1/\tau$  сталий. Тоді процес зміни  $X$  описується рівнянням (1).

Доповнимо вже описану ситуацію наявністю кредитної картки банку. Нехай розмір заощаджень у банку  $Y$  (аналог об'єму „інноваційних” знань) зростає за рахунок відрахування частки  $k$  від прибутку, а в гаманець надходять "відсотки" з цього внеску зі швидкістю  $kY$ . Така ситуація описується рівняннями (2). Відсутність у початковий момент грошей у гаманці і в банку відбито в умовах (3).

Для наочності графічне зображення нашої моделі подано на рис. 1 [1;3].

знань



**Рис. 1. Модель нагромадження знань**

Якщо коефіцієнт  $k$ , що визначає частку зусиль викладача, спрямованих на формування „інноваційних” знань (або частку прибутку, що направляється в банк), не змінюється в часі, то система звичайних диференціальних рівнянь (2) при початкових умовах (3) легко розв’язується аналітично:

$$Y(t) = kV_0 t, \quad X(t) = V_0 \tau [kft + (kft - 1 + k)(e^{-ft} - 1)]. \quad (4)$$

Графіки залежностей  $X(t)$  для різних  $k$  представлені на рис. 2.

Модель традиційного навчання, у якому не враховується вплив „інноваційних” знань, відповідає умові  $k=0$ . У цьому випадку  $X(t)|_{k=0} = V_0 \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ . Графік такої залежності на

початковому етапі найкрутіший, але потім він прямує до горизонтальної асимптоти  $X(\infty) = V_0 \tau$ . Таким чином, об’єм знань з певного предмета при традиційній технології навчання, орієнтованій на бездумне запам’ятовування матеріалу, виходить на насичення: нові знання надходять, а старі з тією ж швидкістю забуваються. У фінансовій аналогії це відповідає тому випадку, коли об’єм "рекети" в одиницю часу  $X/\tau$  (а він зростає з ростом суми  $X$  у гаманці) практично зрівнюється з величиною прибутку  $V_0$ . Розуміючи це, легко знайти горизонтальну асимптоту, навіть не розв’язуючи диференціальне рівняння. Дійсно, якщо  $X(\infty)/\tau = V_0$ , то  $X(\infty) = V_0 \tau$ .

У тому випадку, коли в процесі навчання відбувається формування „інноваційних” знань ( $k > 0$ ), асимптота графіка залежності  $X(t)$  стає вже не горизонтальною, а похилою. У цьому

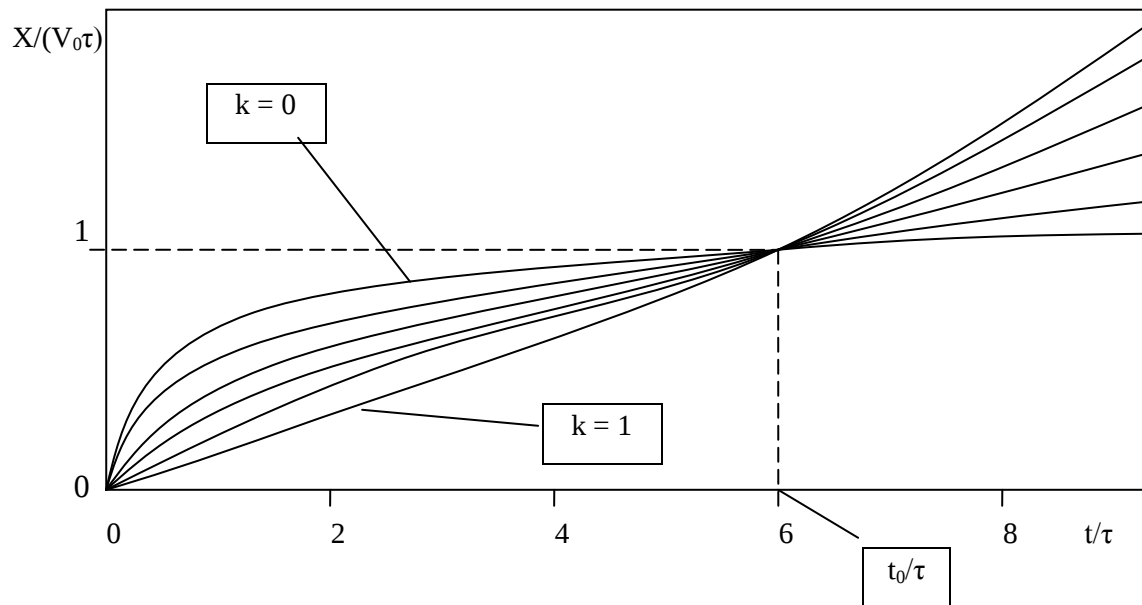
можна переконатися за допомогою (4): якщо врахувати, що  $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то вийде вираз для лінійної функції, графік якої є похилою асимптотою. При цьому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dX}{dt} = kfV_0 \tau,$$

тобто чим більший параметр  $\alpha$ , тим більша гранична швидкість зростання величини  $X$ . Це означає, що зростання об’єму знань з певного предмета через великий час після початку навчання відбувається тим швидше, чим більша частка зусиль учителя, спрямована на формування „інноваційних” знань.

На початку ж навчання, як уже вказувалося, традиційна технологія дає найбільшу швидкість зростання об’єму знань, і тут тенденція зворотна: чим більший  $\alpha$ , тим нижче початкова швидкість зростання знань. Це можна зрозуміти, підставивши в (2) початкові значення  $X$  і  $Y$ . і

одержавши  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dX}{dt} = V_0(1-k)$  (зміна об'єму знань на початку навчання визначається лише швидкістю одержання знань безпосередньо від викладача). Якщо формуються тільки „інноваційні” знання ( $k=1$ ), то початкова швидкість нагромадження знань взагалі дорівнює нулю!



**Рис. 2. Залежність об'єму „традиційних” знань від часу для технологій, що різняться часткою зусиль, спрямованих на формування „інноваційних” знань**

З графіків на рис. 2 видно, що в деякий момент часу  $t_0$  об'єми знань студентів, які навчаються за технологіями з усіма можливими  $k$ , стають однаковими (це можна довести й аналітично). До моменту  $t_0$  „виграє” традиційна технологія з  $k=0$ , а після цього моменту – інноваційна з  $k=1$ .

Спробуємо знайти  $t_0(\tau, f)$ . Прирівнявши  $X(t_0)$  при  $k=0$  і  $k=1$ , отримуємо трансцендентне рівняння

відносно  $t_0$ :  $f\tau = \frac{t_0}{1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}}} - 1$ . Таким чином, аналітичного виразу для  $t_0$  одержати неможливо. Але

при відомих  $f$  і  $\tau$  можна було б чисельними методами (або графічно) знайти  $t_0$ .

Цікаво простежити долю студента після завершення формальної освіти. У нашій моделі це відповідає зникненню „підкачки” „традиційними” знаннями і „інноваційних” знань „ззовні”, що виражається в тому, що після деякого моменту часу  $t_3$ , швидкість  $V_0$  буде дорівнювати нулеві. Тоді рівняння (2) набудуть вигляду

$$\frac{dY}{dt} = 0, \quad \frac{dX}{dt} = fY - \frac{X}{\tau}.$$

Графіки залежностей  $X(t)$  для випадків  $t_3 > t_0$  і  $t_3 < t_0$  подані на рис. 3 і 4 відповідно.

З графіків видно, що після завершення освіти об'єм знань виходить на горизонтальну асимптоту, однак сталі значення  $X(\infty)$  різні. Чим більша при навчанні частка зусиль, що йдуть на формування „інноваційних” знань, тим більший граничний об'єм „традиційних” знань. І якщо в випусника „інноваційні” знання відсутні взагалі ( $k=0$ ), то після закінчення навчання відбувається неминуче забування нагромаджених „традиційних” знань, що призводить до практично повного їх зникнення. І навпаки, при достатньому об'ємі „інноваційних” знань знання випусника після закінчення офіційного навчання можуть навіть збільшуватися. Як тут не згадати вислів М.Лауе: „Освіта є те, що залишається після того, як усе вивчене забуде” [1, 2].

Відразу після закінчення офіційного навчання швидкість приросту „традиційних” знань

стрибкоподібно зменшується на величину  $V_0(1-k)$ . І лише при  $k=1$  (формувалися тільки „інноваційні” знання) графік буде без злому.

На рис. 3 і 4 не випадково показані якісно різні ситуації  $t_3 > t_0$  і  $t_3 < t_0$ . Якщо момент контролю знань  $t_k$  збігається з моментом закінчення формальної освіти  $t_3$ , то результати цього контролю повинні давати прогноз щодо успішності подальшої професійної діяльності суб'єкта.

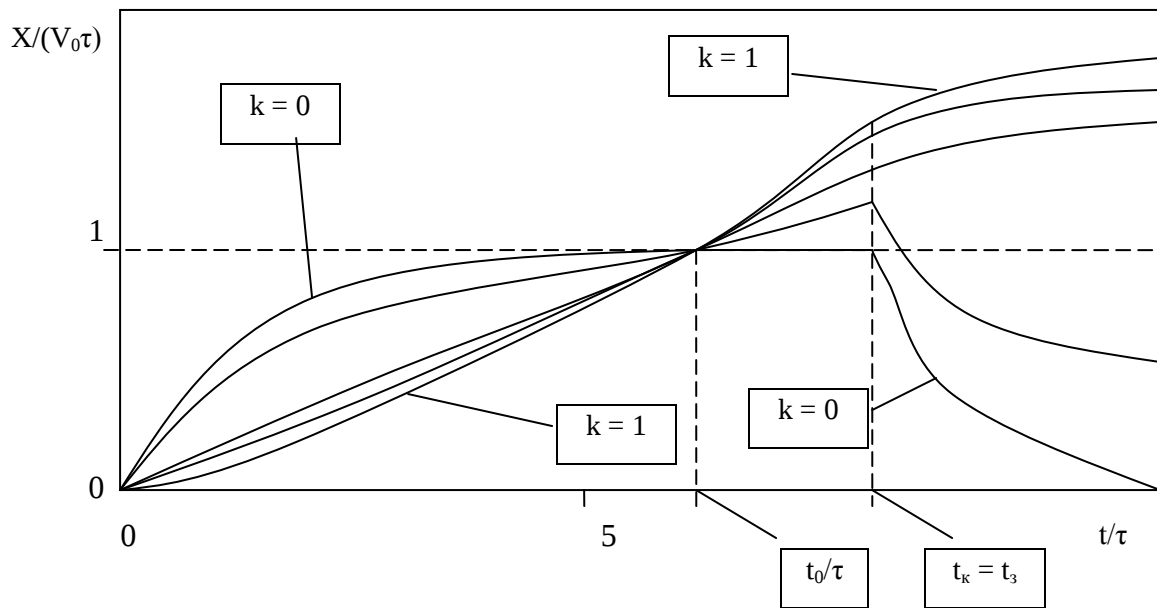


Рис. 3. Випадок адекватного прогнозу успішності професійної діяльності

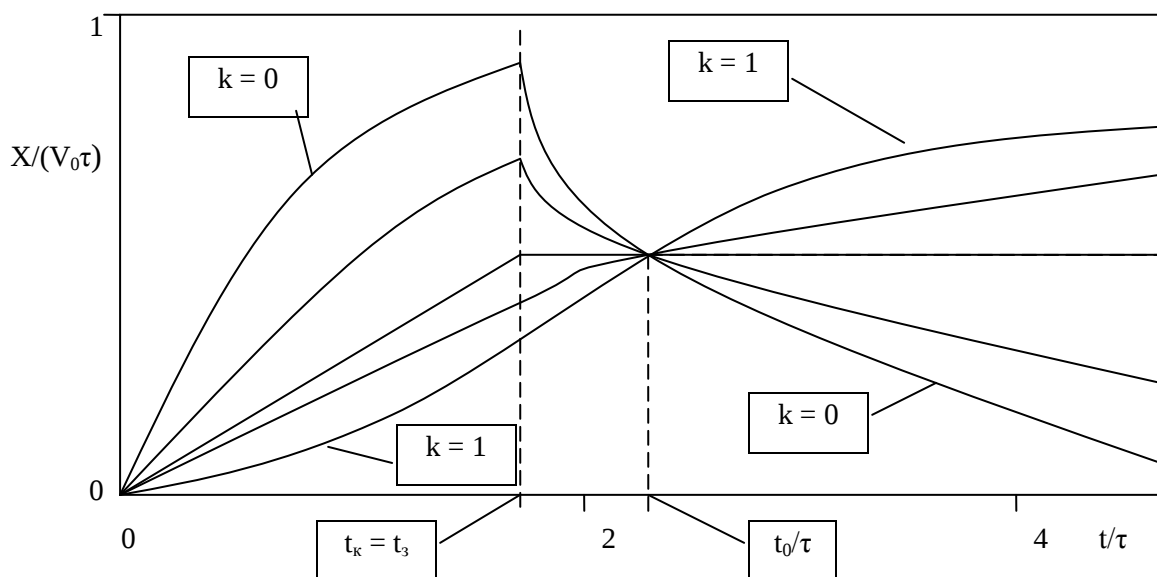


Рис. 4. Випадок неадекватного прогнозу успішності професійної діяльності

З рис. 3 видно, що, якщо до моменту закінчення освіти  $t_3$ , точка  $t_0$  уже пройдена, то розподіл студентів за об'ємом знань у подальшому не зміниться (тільки розрив між ними збільшиться). У цьому випадку результат випускних іспитів більш-менш адекватно відбиває успішність наступної професійної діяльності (якщо припустити, що остання визначається в першу чергу об'ємом

„традиційних” знань).

На рис. 4 ілюструється зворотна ситуація: розподіл студентів за об'ємом знань на випускних іспитах протилежний до того, який складається після моменту  $t_0$ , де усі графіки перетнуться. Тут для досягнення максимальної оцінки на випускних іспитах необхідно використовувати традиційну технологію навчання, однак такий "відмінник" через якийсь час помітно відстане від "трієчника". Відомо, що такі ситуації зустрічаються не так уже й рідко.

Отже, якщо постає вимога максимізувати об'єм знань у віддаленій перспективі після закінчення навчання, то оптимальним значенням  $k$  буде 1 (що відповідає формуванню тільки інноваційних” знань). Звичайно, тут передбачається, що студент зацікавлений у знаннях з певного предмета і одержує їх самостійно, користуючись уже сформованими інноваційними” знаннями.

Після того, як були побудовані залежності  $X(t)$  для різних сталих значень параметра  $k$ , що характеризує частку зусиль, спрямованих на формування інноваційних” знань, виявилось нескладною справою вибрати значення  $k$ , яке максимізує об'єм предметних знань на відомий момент контролю  $X(t_k)$ . Відповідь виявилася простою: якщо  $t_k < t_0$  (момент контролю буде раніше моменту, у який всі залежності  $X(t)$  для різних постійних значень параметра  $k$  перетинаються), то найкращий результат (у розумінні максимальності  $X(t_k)$ ) буде при  $k=0$  (тобто всі сподівання на бездумне запам'ятовування); якщо  $t_k > t_0$ , то найкращим буде варіант  $k=1$  (усі зусилля викладача – на навчання інноваційних” знань); якщо  $t_k = t_0$ , то всі стратегії незмінних  $k$  дають однакові результати.

Природним постає питання про те, як зміняться результати задачі про максимізацію  $X(t_k)$ , якщо зняти обмеження на сталість у часі параметра  $k$ . Іншими словами, як вибрати функцію  $k(t)$ , щоб забезпечити максимальний об'єм знань на момент контролю?

Ця задача видається помітно складнішою і нагадує задачі варіаційного числення. Перше питання, що напрошується: чи впливає з умови  $0 \leq k(t) \leq 1$ , висновок про те, що графік  $X(t)$  буде завжди розташований між графіками, які відповідають граничним значенням параметра  $k$ , тобто графіками  $X(t)|_{k=0}$  і  $X(t)|_{k=1}$ . Інтерес до цього питання пов'язаний з тим, що позитивна відповідь на нього означала б, що відповідь у загальній задачі щодо максимізації  $X(t_k)$  була б абсолютно такою ж, як і в окремому випадку, коли параметр  $k$  не змінюється під час навчання. Але відповідь на поставлене питання негативна. Ми в цьому переконалися, підставивши різні  $k(t)$ , що задовольняють зазначеній умові, у комп'ютерну програму, що обчислює значення  $X(t)$  і будує відповідні графіки. Проте, як потім з'ясувалося, усвідомити, що відповідь негативна, можна було і за допомогою досить нескладних міркувань. Таким чином, задача не зводиться до попередньої і вимагає окремого розв'язування. "Лобове" застосування математичних методів дає таку стратегію максимізації  $X(t_k)$ :

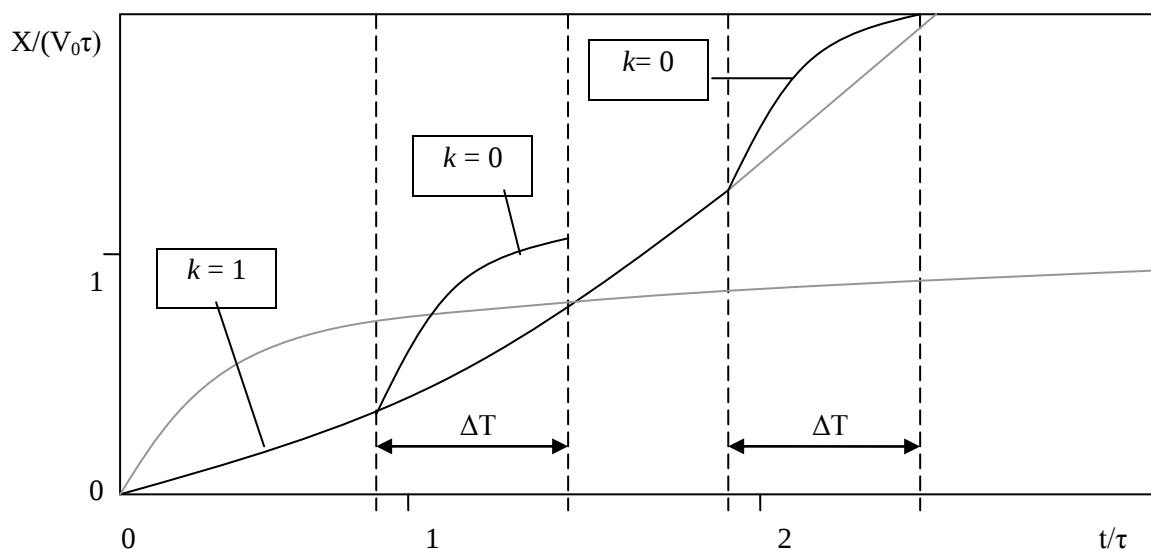
$$k(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_k - \Delta T, \\ 0, & t_k - \Delta T < t \leq t_k, \end{cases}$$

де  $\Delta T = \tau \cdot \ln(1 + f\tau)$ .

Звичайно, передбачається, що  $t_k - \Delta T > 0$ , у протилежному випадку  $\alpha = 0$ .

Іншими словами, якщо  $t_k - \Delta T \leq 0$ , то перемагає традиційна технологія "накачки" предметними знаннями ( $k=0$ ). Якщо ж до моменту контролю більше часу, ніж  $\Delta T$ , то треба спочатку формувати інноваційні” знання ( $k=1$ ), а коли до моменту контролю залишиться  $\Delta T$ , варто переключитися на режим "традиційного" навчання. Цікаво, що величина  $\Delta T$  не залежить від  $t_k$ . Для наочності графіки  $X(t)$  при оптимальних стратегіях для двох значень  $t_k$  подані нарис. 5.

Зрозуміти отриманий результат нам допомогла фінансова аналогія [3, с.23]. Уявимо собі, що, одержуючи фіксований прибуток, ми замислюємося над "долею" кожної копійки: покласти її в банк чи в гаманець? При цьому нам хочеться, щоб до моменту контролю від неї залишився якнайбільш вагомий "слід" у гаманці. Оскільки рівняння, що описують нашу модель, лінійні, можна простежити "долю" окремо взятої копійки, тому що вона не залежить від "долей" інших копійок (лінійність рівнянь відбиває принцип суперпозиції). Обчислимо величину "сліду"  $x$  в гаманці у контрольний момент часу  $I_k$  від копійки, що потрапила до нас у момент часу  $i$ , використовуючи відповідні індекси для двох шляхів: через банк ("б") і безпосередньо в гаманець ("г").



**Рис. 5. Оптимальні стратегії досягнення максимального об'єму "традиційних" знань на момент контролю (для двох значень  $t_k$ )**

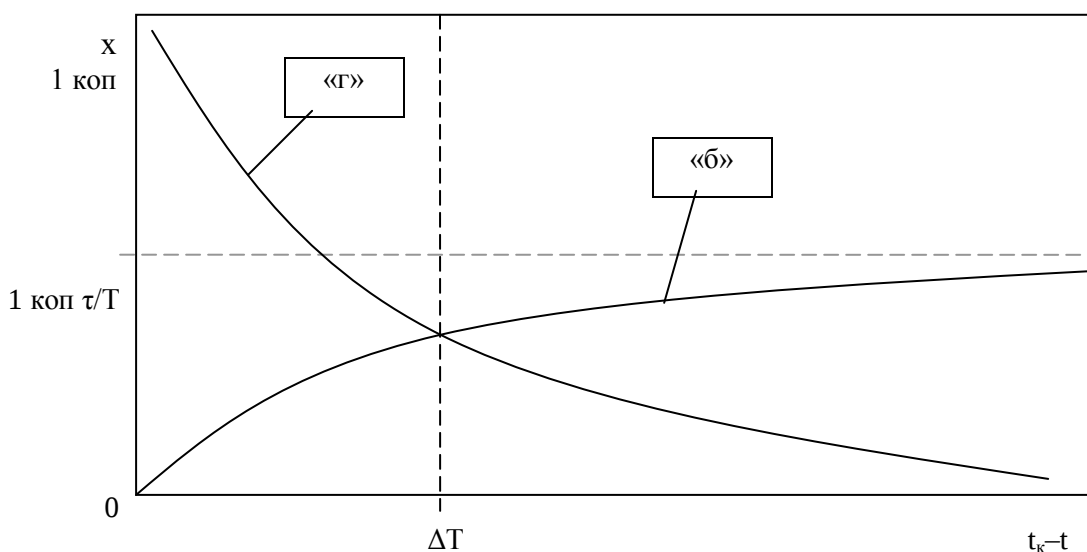
Легко отримати вирази

$$x_{\Gamma}(t_k - t) = 1kon \cdot e^{-(t_k - t)/\tau},$$

$$x_{\delta}(t_k - t) = 1kon \cdot \frac{\tau}{T} (1 - e^{-(t_k - t)/\tau}).$$

Дійсно, у випадку "Г" копійка "розпадається" під дією "рекету", і від неї тим менше залишиться, чим більше часу було до контрольного моменту; потрапивши у банк, вона стає для гаманця джерелом постійного доходу, величина якого в одиницю часу дорівнює 1 коп/Т. А з подібними задачами ми вже зустрічалися.

Порівнявши графіки  $x_{\Gamma}(t_k - t)$  і  $x_{\delta}(t_k - t)$  (див. рис. 6), дійдемо висновку, що при  $t_k - t < \Delta T$  вигідніше покласти копійку в гаманець, а при  $t_k - t > \Delta T$  — у банк. Величина  $\Delta T$  легко знаходиться як абсциса точки перетину розглянутих графіків.



**Рис. 6. Графіки «сліду» у гаманці (фінансова аналогія), які допомагають усвідомити вибір оптимальної стратегії**

Наші експериментальні дослідження, говорять про те, що інноваційна технологія може давати кращі результати за рівнем знань, який вимірюється традиційними тестами, уже через два роки. Ще через два роки переваги інноваційної технології стають цілком очевидними.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Безносюк О.О. Інноваційні та традиційні технології навчання: математична модель/ О.О. Безносюк // Збірник наукових праць Кременецького обласного гуманітарно-педагогічного інституту ім. Тараса Шевченка. - Випуск 2 - Серія "Педагогічні науки". -Кременець, 2007. -С.263-272.

2.Безносюк А.А. Математическая модель накопления знаний / А.А. Безносюк // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 3 : Філалогія, Педагогіка, Псіхалогія. - Брэст : БрДУ, 2010. - Вып. 2 .- С.76-81.

3.Безносюк О.О. Математична модель накопичення знань та її фінансова аналогія/ О.О. Безносюк // Економічний вісник університету. Збірник наукових праць учених та аспірантів. Вип. 9. – Переяслав-Хмельницький, 2009. – С.17-23

**Безносюк Олександр Олександрович**, професор кафедри педагогіки та психології, кандидат педагогічних наук, професор, Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія ім. Тараса Шевченка

**Beznosyuk Aleksandr A.**, professor of pedagogy and psychology, candidate of pedagogical sciences, professor, Kremenets regional humanitarian and pedagogical academy named after. Taras Shevchenko