

ІЗОМОРФІЗМ ЯК ЕФЕКТИВНИЙ МЕТОД КОНСТРУЮВАННЯ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

Запропоновано метод конструювання числових систем, а саме ізоморфізм для множини натуральних чисел, цілих чисел, поля раціональних чисел, розширення множини $\mathbb{R}$, результатом якого стала побудова поля комплексних чисел.

Ключові слова: ізоморфізм, відношення еквівалентності, асоціативність, комутативність, переріз Дедекінда.

Abstract

The method for constructing numerical systems is proposed, namely isomorphism for a set of natural numbers, integers, fields of rational numbers, and the expansion of the set $\mathbb{R}$, the result of which was the construction of a field of complex numbers.

Keywords: isomorphism, equivalence relation, associativity, commutativity, Dedekind cross section.

Постановка проблеми

Як свідчать «Начала» Евкліда (VII-IX книги), основи теорії натуральних чисел стали об'єктом досліджень у стародавній Греції десь у VI-V ст. до н.е. А той факт, що в Евкліда на чільному місці теорема про нескінченність простих чисел, красномовно каже про те, що натуральний ряд, який сформувався в результаті відриву від реальних обмежень при лічбі і усвідомленні існування як завгодно великих чисел став надбанням значно раніших цивілізацій. І тільки у кінці XIX ст. Пеано (1891) сформулював характеристичну властивість, яка виділяє його з поміж нескінченних множин, а саме аксіому індукції, хоча нею як методом доведення користувались математики як у XVIII, так XIX ст. [1].

Ми не будемо розкривати тут мотивацію, що спонукала до розширення множини натуральних чисел (вона в достатній мірі розкрита у монографічній літературі з історії математики). Ми лише нагадаємо, що подальша (формальна) побудова ієрархії числових систем здійснюється через теоретико-множинне конструювання певної фактор-множини і наділення останньої необхідними операціями. Звичайно така конструкція має задовольняти систему аксіом, яка характеризує рід певної числової системи.

Мета даної публікації

Розширення множини натуральних чисел через теоретико-множинне конструювання певної фактор-множини і наділення останньої необхідними операціями.

Виклад основного матеріалу

Так, *кільцем цілих чисел* називають мінімальне упорядковане кільце Z , що включає множину натуральних чисел N .

Щоб довести існування кільця Z , необхідно побудувати модель, яка задовольняє сформульоване означення.

За базисну множину візьмемо $N \times N = \{(m, n) | m, n \in N\}$ (інтуїтивна основа – подання різниці $m - n$ у вигляді пари (m, n)). Відношення $\Omega: \subset (N \times N) \times (N \times N)$, означене на множині $N \times N$ за правилом $(m, n): (p, r) \Leftrightarrow m + r = n + p$, є відношенням еквівалентності.

Означимо у множині $N \times N$ операції додавання і множення за правилами:

$$(m, n) + (p, r) := (m + p, n + r),$$

$(m, n) \cdot (p, r) = (mp + nr, mr + np)$, (інтуїтивна основа – додавання і множення різниць).

Відношення еквівалентностей породжує фактор-множину $Z' = N \times N / : \Omega$, на яку переносяться операції додавання і множення через представників цих класів. Для прикладу, якщо $A, B \in N \times N / : \Omega$ і $(m, n) \in A$, $(p, r) \in B$, то $A + B$ є той клас, представником якого є пара $(m + p, n + r)$, а $A \cdot B$ є той клас, представником якого є пара $(mp + nr, mr + np)$. Зокрема, оскільки $(m, n) + (p, p) = (m + p, n + p) : \Omega : (m, n)$, то клас, елементами якого є пари з однаковими компонентами, грає роль нейтрального (нульового) елемента відносно додавання, а оскільки

$$(m, n) \cdot (p + 1, p) = (mp + np + m, mp + np + n) : (m, n),$$

то клас, елементами якого є пари вигляду $(p + 1, p)$, грає роль нейтрального (одичного) елемента відносно множення.

Звичайно перевірка асоціативності і комутативності додавання і множення не завдасть великих труднощів. А той факт, що $(m, n) + (n, m) = (m + n, m + n)$ каже про те, що клас, представником якого є пара (n, m) , є елементом, протилежним до класу, представником якого є пара (m, n) .

Отже, множина $Z' = N \times N / : \Omega$ є асоціативно-комутативне кільце з одиницею.

Якщо у множині $N \times N$ означити відношення $>$ за правилом

$$(m, n) > (p, r) \Leftrightarrow m + r > n + p$$

і перенести його у множину Z' то знову-таки неважко переконатись, що відношення $>$ транзитивне і зв'язне. Отож кільце Z' лінійно упорядковане, причому пов'язане з додаванням і множенням на натуральне число, властивістю монотонності.

Якщо позначити через Z'_1 множину всіх тих класів, у представників яких перша компонента більша за другу, то вона замкнена відносно операцій додавання і множення, причому ізоморфна множині натуральних чисел. Замінивши у множині Z' підмножину Z'_1 множиною N , дістанемо множину $Z = N \cup (Z \setminus Z'_1)$ (кільце Z мінімальне, бо кожен його елемент дорівнює різниці натуральних чисел). Зрозуміло, що можна прийти до звичайних позначень цілих чисел, якщо клас, елементами якого є пари з однаковими компонентами, позначити o , а клас, представником якого є пара $(m, m + k)$, позначити $-k$ [2].

Поле *раціональних чисел* називають мінімальне упорядковане поле Q , що включає кільце цілих чисел Z .

При побудові моделі за базисну множину беруть множину $Z \times Z \setminus \{0\} = \{(p, q) \mid p, q \in Z, q \neq 0\}$ (інтуїтивна основа – подання частки цілих чисел $\frac{p}{q}$ у вигляді пари (p, q)). Відношення $: \Omega$, означене на множині $Z \times Z \setminus \{0\}$, за правилом $(p, q) : (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$ є відношенням еквівалентності.

Якщо у фактор-множині $Q' = Z \times Z \setminus \{0\} / : \Omega$ задати операції додавання і множення через додавання і множення представників класів

$$(p, q) + (r, s) := (ps + qr, qs),$$

$$(p, q) \cdot (r, s) := (pr, qs), \text{ то неважко перевірити, що } Q' \text{ – поле.}$$

Коли пара (p, q) належить деякому класу, то цьому ж класу належить пара $(-p, -q)$, а тому за представника класу можна завжди обрати пару (p, q) , де $q \in N$. Будемо вважати, що коли $q, s \in N$, то $(p, q) > (r, s) \Leftrightarrow ps > qr$. Означивши це відношення у множині Q' , наділяємо Q' структурою лінійного порядку, який монотонний відносно додавання і множення на додатне число.

З лінійно упорядкованого поля вилучаємо класи, представниками яких є пари вигляду $(p, 1)$, де $p \in Z$. Позначимо цю підмножину через Q'_1 . Неважко переконатись, що операції додавання і множення не виводять за межі Q'_1 причому Q'_1 ізоморфне Z . Таким чином, полем раціональних чисел є множина $Q = Z \cup (Q \setminus Q'_1)$ (поле мінімальне, бо кожен його елемент дорівнює частці цілих чисел).

Ізоморфну полю Q модель можна побудувати, виходячи з множини натуральних чисел, взявши за

базисну множину $N^3 = N \times N \times N$ (інтуїтивна основа – подання дробу $\frac{m-n}{p}$ у вигляді трійки натуральних чисел (n, n, p)).

Відношення $:\Omega$ означене за правилом

$$(m, n, p) : (q, r, s) \Leftrightarrow ms + pr = ns + pq,$$

є відношенням еквівалентності. А означивши

$$(m, n, p) + (q, r, s) := (ms + pq, ns + pr, ps),$$

$$(m, n, p)(q, r, s) := (mq + nr, mr + nq, ps),$$

наділяємо фактор-множину $N^3 / : \Omega$ операціями додавання і множення через відповідні операції представників класів. Як результат маємо поле, у якому нульовим елементом є клас, якому належить елемент $(1, 1, 1)$ протилежним до класу, представником якого є елемент (m, n, p) , є клас, представником якого є елемент (n, m, p) . Справді,

$$(m, n, p) + (n, m, p) = (mp + np, np + mp, p^2) : (1, 1, 1).$$

Одиничним елементом є клас, представником якого є елемент $(q+1, q, 1)$, а оберненим до класу, представником якого є елемент (m, n, p) , де $m \neq n$, є клас, представником якого є елемент $(p+1, 1, m-n)$, якщо $m > n$, і елемент $(1, p+1, n-m)$, якщо $n > m$.

Через лінійний порядок у полі Q встановлюється його *розташованість*, точніше кожне число $r > 0$ називається *додатним*, число $r \neq 0$, яке не є додатним ($0 > r$) називається *від'ємним*. Таким чином, для будь-якого числа r має місце лише одне із трьох: r – додатне, r – нуль, r – від'ємне, і для будь-яких двох додатних чисел r_1 і r_2 , $r_1 + r_2$ і $r_1 r_2$ – додатні.

Множина Q *скрізь щільна*, тобто для будь-яких різних раціональних чисел r_1 і r_2 , існує безліч раціональних чисел, які знаходяться між r_1 і r_2 , точніше множина $\{r / r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5\}$ нескінченна. Разом з тим вона не є неперервною (не кожен розріз Дедекінда має межовий елемент).

Напевно найпривабливішою моделлю поля раціональних чисел є подання кожного з них нескінченним періодичним десятковим (а точніше, систематичним) дробом, причому щоб уникнути двозначності у поданні, дробі, які мають періодом дев'ятку, виключають. Зазначимо, що подання раціональних чисел у вигляді $\frac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ (інколи з додатковою домовленістю, якщо $p \neq 0$ то $(|p|, q) = 1$, і

подання нескінченним періодичним десятковим дробом пов'язані у відомий спосіб. А саме, кожне ціле число подається у вигляді дробу $n,0000\dots$, а кожне дробове число $\frac{p}{q}$ подається у вигляді

$$\frac{p}{q} = \left[\frac{p}{q} \right] + \left\{ \frac{p}{q} \right\}, \text{ де } \left[\frac{p}{q} \right] - \text{найбільше ціле число, яке не перевищує числа } \frac{p}{q}, \left\{ \frac{p}{q} \right\} = \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q} \right] - \text{пода-}$$

ються у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Зокрема, він має періодом 0 (є скінченним десятковим дробом, якщо канонічний розклад натурального числа q не містить множників, відмінних від 2 і 5).

Якраз при такому поданні природним є доповнення множини Q всіма можливими нескінченними неперіодичними десятковими дробами. Наділивши цю множину операціями додавання і множення (про це детально у нашому посібнику) і задавши лінійний порядок, переконаємось, що така числова система є неперервне упорядковане поле, що включає поле раціональних чисел Q . Єдність такого поля забезпечується тим, що кожен його елемент є межею певного перерізу Дедекінда множини Q [2].

Для множини R найбільш плідними як у теоретичному, так і практичному плані є ізоморфні моделі, в основі яких різні систематичні подання її елементів.

Висновки

Відомі мотиви спонукали до розширення множини R , результатом якого стала побудова поля комплексних чисел. Однак слід зазначити, що коли попередні розширення зберігали всі властивості, які

мали попередні системи, і значно примножувались новими, то поле комплексних чисел не тільки дало інструментарій для розв'язування тих задач, які неможливо було розв'язати з допомогою дійсних чисел, але й зазнало перших втрат (неможливість лінійно упорядкувати його, погодивши з операціями додавання і множення).

Математична практика використовує різні моделі поля комплексних чисел, тобто мінімального поля C , що включає поле R і елемент i , для якого $i^2 = -1$, причому такі подання є однозначними.

Для прикладу, алгебраїчне подання $z = a + bi$, де $a, b \in R$, матричне подання $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ подання

через елементи лінійного простору R^2 над полем R $z = (a, b)$. Задавши при кожному поданні у відповідний спосіб операції додавання і множення (як додавання і множення многочленів з врахуванням того, що $i^2 = -1$ у першому випадку, як звичайне додавання і множення матриць у другому, за правилом $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ у третьому), ми дістанемо алгебраїчну структуру роду поля комплексних чисел [3].

Однак, якщо розглядати поле C як лінійний простір розмірності два, то базис в усіх трьох випадках жорстко визначено.

Ми пропонуємо при побудові моделей поле C , а пізніше тіла кватерніонів H , дещо інший підхід.

Основна ідея у певній свободі при виборі базису, що дає можливість адаптувати відповідну модель до середовища, у якому розв'язується певний тип задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Стройк Д. Коротка історія математики / Д. Стройк – К.: Рад. школа, 1960. – 305 с.
2. Томусяк А.А. Побудова поля комплексних чисел, пов'язаного з косокутною системою координат / А.А. Томусяк // Шоста Міжнародна наукова конференція ім. ак. М. Кравчука. Матеріали конференції. – К.: 1997. – С. 395.
3. Яглом И.М. Комплексные числа / И.М. Яглом – М.: ГИЗФМЛ, 1963. – 192 с.

Шмулян Ярослава Віталіївна – студент факультету математики, фізики та технологій, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, e-mail: yaroslava.shmulyan@gmail.com

Вотякова Леся Андріївна – канд. фіз. – мат. наук, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, e-mail: tomusiak.lesia@gmail.com

Shmulian Yaroslava V. – student of the Faculty of Mathematics, Physics and Technology, Vinnytsia State Pedagogical University named after Mikhail Kotsubinsky, Vinnytsia, e-mail: yaroslava.shmulyan@gmail.com

Votyakova Lesya A. – Cand. nat - mat. Sciences, associate professor, Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia State Pedagogical University named after Mikhail Kotsyubinsky, Vinnytsia, e-mail: tomusiak.lesia@gmail.com