

ПРО ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

Одержано результат про існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Ключові слова: дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, теорема про зачеплення.

Abstract

It is obtained result on existence of standing waves for discrete nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity on 2D-lattice.

Keywords: discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, linking theorem.

Вступ

Останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння $\sin$ -Гордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статті [3] одержано умови існування періодичних біжучих хвиль в ланцюгах Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. В статтях [1; 14; 15] вивчалися біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. В статтях [7; 8] одержано результати про існування звукових і надзвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. А в статті [2] одержано результат про існування відокремлених біжучих хвиль для таких систем. В статтях [6; 9; 11] вивчалися біжучі хвилі для дискретного рівняння $\sin$ -Гордона на двовимірній ґратці.

В статтях [4; 16; 17] досліджено питання існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера на одновимірній ґратці.

Результати дослідження

Вивчається дискретне нелінійне рівняння Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) = -\Delta\psi_{n,m}(t) - x_{n,m}|\psi_{n,m}(t)|^2\psi_{n,m}(t), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція (n, m) -ї частинки, а $(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа. Зауважимо, що в статті [10] вивчалися двовимірні солітони в таких системах при $x_{n,m} \equiv 2$.

Припускається, що послідовність $(x_{n,m}) \subset \mathbb{R}$ є N -періодичною, тобто $x_{n+N,m} = x_{n,m+N} = x_{n,m}$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m} \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

де $(u_{n,m}) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з N -періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто відповідно

$$u_{n+N,m} = u_{n,m+N} = u_{n,m}, \quad (3)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} u_{n,m} = 0. \quad (4)$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо рівняння

$$-\Delta u_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m} |u_{n,m}|^2 u_{n,m}. \quad (5)$$

Позначимо $L = a_{n,m} u_{n+1,m} + a_{n-1,m} u_{n-1,m} + b_{n,m} u_{n,m+1} + b_{n,m-1} u_{n,m-1} + c_{n,m} u_{n,m}$ і розглянемо більш загальне рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m} |u_{n,m}|^2 u_{n,m}, \quad (6)$$

де $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$ і $c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}$.

З рівнянням (6) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega u, u) - \frac{1}{4} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} u_{n,m}^4, \quad (7)$$

визначений на гільбертовому просторі $E := l^2$ зі скалярним добутком $(u, v) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} u_{n,m} v_{n,m}$ та нормою

$$\|u\| = \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Зазначимо, що кожний елемент } l^2 \text{ автоматично задовольняє умову (4).}$$

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і позначимо через E_k простір всіх kN -періодичних послідовностей. Це є kN -вимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(u, v)_k = \sum_{n,m \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$ та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{n,m \in Q_k} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ де } Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2}\right] \leq n \leq kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\}, \text{ і } [x] - \text{ціла частина } x. \text{ На просторі } E_k$$

розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u, u) - \frac{1}{4} \sum_{n,m \in Q_k} x_{n,m} u_{n,m}^4, \quad (8)$$

де L_k — оператор L , який діє в просторі E_k .

Критичні точки функціоналів (7) і (8) є розв'язками рівняння (6), які задовольняють відповідно умови (3) і (4).

Основними результатами є наступні дві теореми ([5]).

Наступна теорема, яка доведена за допомогою методу критичних точок і теореми про зачеплення ([18]), дає існування нетривіальних періодичних розв'язків рівняння (6).

Теорема 1. Нехай $x_{n,m} > 0$, $\omega \in (a; b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ рівняння (6) має нетривіальний kN -періодичний розв'язок $u^{(k)} \in E_k$. Більше того, існує константа $C > 0$, незалежна від k і така, що $\|u^{(k)}\|_k \leq C$, $J_k(u^{(k)}) \leq C$.

За допомогою методу періодичних апроксимацій доведено існування нетривіальних локалізованих розв'язків рівняння (6). Критичні точки функціоналу J побудовано за допомогою переходу до границі при $k \rightarrow \infty$ в критичних точках функціоналу J_k .

Теорема 2. Нехай $x_{n,m} > 0$ і $\omega \in (a; b)$. Тоді якщо $b \neq +\infty$, то рівняння (6) має нетривіальний розв'язок $u \in E$. Якщо ж $b = +\infty$, то рівняння (6) нетривіальних розв'язків не має.

Висновки

Таким чином, у цій статті одержано результат про існування періодичних і локалізованих стоячих хвиль для рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, №2. — С. 154–175.

2. Бак С.М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, №4. — С. 435-444.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасті-Улама на двовимірній ґратці // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, №1. — С. 76-88.
4. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінґера із насичуванням нелінійністю // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, №1. — С. 78-84.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. — Вип. 16. — С. 21-29.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні $\sin$ -Гордона на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5-10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17-23.
8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 5-12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 45-52.
10. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. — 1994. — Т. 60, вып. 11. — С. 815-821.
11. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice // Journal of Mathematical Sciences, 2016. — Vol. 217, №2 (August). — P. 187-197.
12. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice // Journal of mathematical physics, analysis, geometry, 2018. — Vol. 14, № 1. — P. 16-26.
13. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice // Ukrainian mathematical Journal, 2017. — Vol. 4 (69). — P.509-520.
14. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — 20. — P. 319-341.
15. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Volume 3, №1 (February). — P. 105-114.
16. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations // Nonlinearity. — 2006. — 19. — P. 27-40.
17. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. — 2008. — 464. — P. 3219-3236.
18. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. — Providence: Amer. Math. Soc., 1986. — 100 p.

Бак Сергій Миколайович — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Bak Sergiy M. — Cand. Sc. (Eng), Associate Professor of Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University