

РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА «ВИБРАНІ ПИТАННЯ КУРСУ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ»

Донбаська державна машинобудівна академія

Анотація

Розроблено навчальний посібник «Вибрані питання курсу диференціальні рівняння» для студентів спеціальності «Системний аналіз»

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, фазові траєкторії..

Abstract

We are represented the textbook «Selected questions of differential equations» for students of the branch “System Analysis”.

Keywords: ordinary differential equations, the phases trajectory.

Вступ

Навчальний посібник містить у стислому вигляді огляд теорії систем диференціальних рівнянь, теорії стійкості, питань пошуку і дослідження особливих розв’язків і особливих точок звичайних диференціальних рівнянь, елементи операційного числення. Вказана тематика, наведені зразки розв’язання практичних завдань і завдань дослідницького характеру.

Результати дослідження

У посібнику розглянуто деякі основні питання якісної теорії диференціальних рівнянь, а саме питання пошуку та дослідження особливих точок і розв’язків звичайних диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь, елементи теорії стійкості таких розв’язків та методи застосування операційного числення до розв’язання диференціальних рівнянь і систем. Подано теоретичний матеріал із вказаної тематики, розглянуто задачі практичного змісту. Істотну увагу приділено поняттю асимптотичної стійкості диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Структура курсу:

1. Вступ;
2. Загальні уявлення про якісні методи дослідження диференціальних моделей;
3. Особливі точки, особливі розв’язки;
4. Елементи теорії стійкості;
- 5 Застосування операційного числення в теорії диференціальних рівнянь;
- 6 Завдання дослідницького характеру;
7. Література.

Наведемо приклад завдання дослідницького характеру, що пропонуються для самостійної роботи студентів.

Приклад. Знайти закон, за яким змінюється заряд у ланцюгу $C - R$, якщо електрорушійна сила змінюється за законом, зображеному на рис. 1. Відомо, що $q(0) = 0$. Результат пояснити графічно.

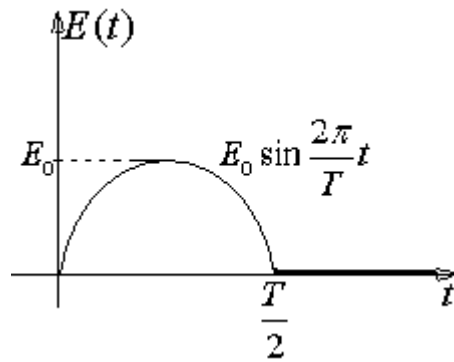


Рисунок 1.

Розв'язання.

Запишемо закон Кірхгофа

$$LI' + RI + \frac{q}{C} = E(t).$$

Оскільки $L = 0$, то

$$RI + \frac{q}{C} = E(t), \quad I(t) = q'(t).$$

Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку

$$Rq' + \frac{q}{C} = E(t), \quad q(0) = 0.$$

Нехай

$$q(t) \div Q(p),$$

тоді

$$q'(t) \div pQ(p) - q(0) = pQ(p).$$

Складемо аналітичний вираз для правої частини рівняння.

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \eta(t) + (-E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t) \eta(t - \frac{T}{2}) = \\ &= E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \eta(t) - E_0 \sin(\frac{2\pi}{T}(t - \frac{T}{2}) + \pi) \eta(t - \frac{T}{2}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \eta(t) + E_0 \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{T}{2}) \eta(t - \frac{T}{2}) \div \\
&\div E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} + E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} e^{-\frac{T}{2}p}
\end{aligned}$$

Маємо алгебраїчне рівняння

$$RpQ(p) + \frac{Q(p)}{C} = E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} + E_0 \frac{\frac{2\pi}{T}}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} e^{-\frac{T}{2}p}$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно $Q(p)$

$$\begin{aligned}
Q(p) &= E_0 \frac{2\pi}{T} \frac{1}{Rp + \frac{1}{C}} \frac{1}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} + E_0 \frac{2\pi}{T} \frac{1}{Rp + \frac{1}{C}} \frac{1}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} e^{-\frac{T}{2}p} = \\
&= E_0 \frac{2\pi}{T} \frac{1}{R} \left[\frac{\frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{-T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} p + \frac{T^2 RC}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2}}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} \right] + \\
&+ E_0 \frac{2\pi}{T} \frac{1}{R} \left[\frac{\frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} + \frac{\frac{-T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} p + \frac{T^2 RC}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2}}{p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} \right] e^{-\frac{T}{2}p}
\end{aligned}$$

Перейдемо до оригіналу $q(t)$

$$\begin{aligned}
q(t) &= E_0 \frac{2\pi}{T} \frac{1}{R} \left[\frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} e^{-\frac{1}{RC}t} - \right. \\
&- \frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t \left. \right] \eta(t) + \\
&+ E_0 \frac{2\pi}{T} \frac{1}{R} \left[\frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} e^{-\frac{1}{RC}(t - \frac{T}{2})} - \right. \\
&- \frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \cos \frac{2\pi}{T} (t - \frac{T}{2}) + \frac{T^2 R^2 C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{T}{2}) \left. \right] \eta(t - \frac{T}{2}).
\end{aligned}$$

Побудуємо графік закону, за яким накопичується заряд на конденсаторі (рис.2)

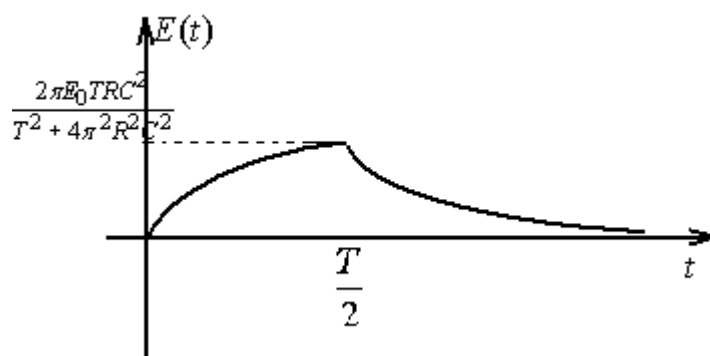


Рисунок 2

Виконаємо аналіз результату

При $t \in \left(0; \frac{T}{2}\right)$ функція $\eta(t) = 1$, $\eta\left(t - \frac{T}{2}\right) = 0$, значить

$$q(t) = \frac{2\pi E_0 T R C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{2\pi E_0 T R C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \cos \frac{2\pi}{T}t + \frac{E_0 T^2 C}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \sin \frac{2\pi}{T}t.$$

При $t \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right)$ функція $\eta(t) = 1$, $\eta\left(t - \frac{T}{2}\right) = 1$, значить

$$q(t) = \frac{2\pi E_0 T R C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{2\pi E_0 T R C^2}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} e^{-\frac{1}{RC}\left(t - \frac{T}{2}\right)} + \frac{E_0 T^2 C}{T^2 + 4\pi^2 R^2 C^2} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

Завдання для самостійної роботи. Провести подібне дослідження у випадках зображених на рис. 3-5.

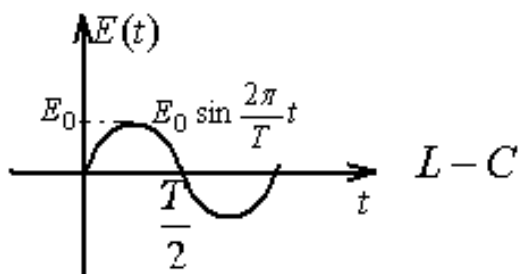


Рисунок 3

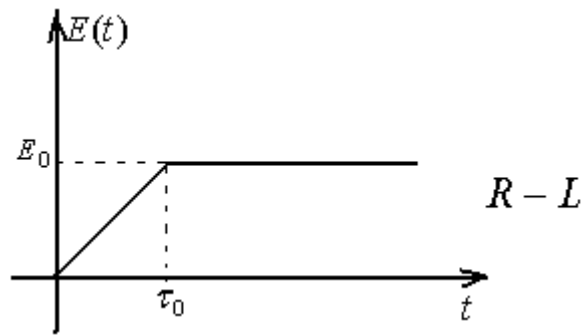


Рисунок 4

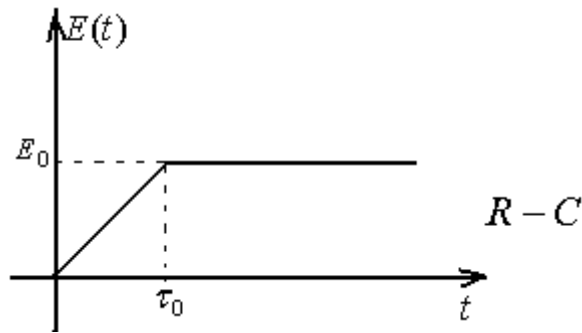


Рисунок 5

Висновки

Курс спирається на загальновідомі факти математичного аналізу та на стандартні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь. Опанування розглянутих тем надає можливість для вивчення і розуміння більш спеціальних питань математичної теорії керування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики: Навч. посібник. – К. : Либідь, 2001. – 336 с.
2. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 422 с.
3. Степанов И. А. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1975. – 324 с.
4. Шкіль М. І. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. II. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. – К. : Либідь, 1994. – 352 с.

Ровенська Ольга Геннадіївна — доцент кафедри вищої математики, Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, e-mail: dgma.vm@ukr.net

Rovenska Olga G. — Associate Professor of Department of Higher Mathematics, Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, e-mail: dgma.vm@ukr.net