

УДК 621.311.62.19

В.І.Мороз¹
А.Б.Вакарчук¹

ЧИСЛОВІ ІНТЕГРАТОРИ В РОЗРАХУНКАХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

¹ Національний університет «Львівська політехніка»

Моделювання перехідних процесів у складних електротехнічних системах, деякі з яких (наприклад, розгалужені електроенергетичні системи) описують тисячами диференціальних рівнянь, є достатньо проблемною задачею навіть для сучасного рівня обчислювальної техніки і методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь [1]. Проблема полягає в тому, що у випадку застосування числових методів на поведінку досліджуваної системи накладається ще й поведінка використаного числового методу. Як показано в роботах [2, 3], внаслідок дискретизації числовими інтеграторами неперервної моделі технічної системи в отриманій цифровій моделі з'являються додаткові нулі та полюси результуючої дискретної передавальної функції, внаслідок чого зростає складність результуючої цифрової моделі електротехнічної системи порівняно з аналоговим прототипом. Проблема загострюється у випадку швидкісного знаходження перехідних процесів в електричних колах у режимі реального часу (real-time calculation) чи й швидше для оперативного керування мережами [1]. Те ж саме стосується сучасних цифрових систем керування, які ґрунтуються на моделях об'єкта чи використовують спостерігачі контрольованих параметрів.

Ключові слова: електричне коло, числові інтегратори, числові методи, дискретизація, нулі/полюси

Вступ

Для дослідження появи похибок від використання числових методів застосуємо відмінний від прикладної математики спосіб – метод передавальних функцій з теорії автоматичного керування.

Звернемо увагу, що у випадку опису динаміки лінійної (лінеаризованої в околі точки) електричної системи засобами передавальних функцій, поведінка такої системи однозначно залежить від розміщення нулів і полюсів цієї передавальної функції (відповідно, коренів поліномів чисельника і знаменника) на комплексній площині [5]. Таким чином, у випадку використання числових методів для розв'язування задач розрахунку динаміки, результуюча дискретна передавальна функція цифрової моделі мала б точно відтворити таку ж саму кількість нулів і полюсів, як і в неперервній моделі. Відзначимо, що для тестового кола другого порядку наявні лише два (дійсні або комплексно-спряжені) корені, які й відповідають за поведінку такої системи.

Мета та задачі

Метаю задачі є дослідження природи впливу числових методів під час використання їх як числових інтеграторів в електромеханічних системах.

Таким чином, вирішується **задача** визначення найбільш ефективних числових методів для подальшого використання числових методів у задачах електромеханіки.

Результати досліджень

Увесь процес одержання дискретної передавальної функції цифрової моделі проілюструємо на прикладі явного числового інтегратора четвертого порядку Адамса і кроку h (також відома як формула Адамса-Бешфорта – *Adams-Bashforth* [6]). Дискретна передавальна функція цифрового інтегратора четвертого порядку і процес її одержання показано в [7]:

$$W_4^{AB}(z) = \frac{h}{24} \frac{(55z^3 - 59z^2 + 37z - 9)}{z^4 - z^3} \quad (1)$$

Для одержання цифрової моделі у формі структурної моделі системи другого порядку використане подання у канонічній формі спостережності [5], як показано на рис. 1. Позначення на рисунку:

a_0, a_1, a_2 – коефіцієнти характеристичного полінома передавальної функції другого порядку;

$X(s)$ – відображення за Лапласом вхідного сигналу;

$Y(s)$ – відображення за Лапласом вихідного сигналу.

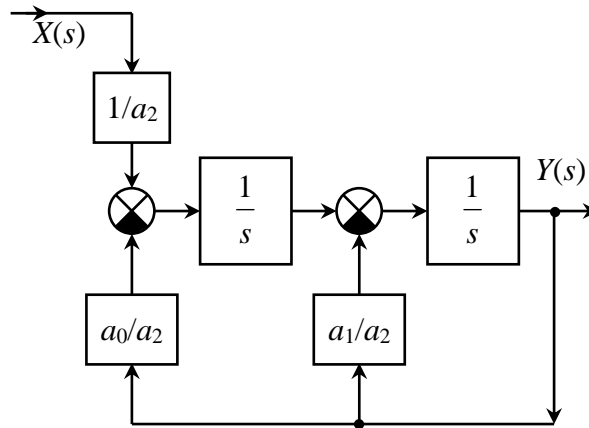


Рис. 1. Структурна схема для канонічної форми передавальної функції другого порядку

Наступним кроком є заміна неперервного інтегратора з передавальною функцією $1/s$ на дискретний інтегратор з відповідною передавальною функцією $W_i(z)$. Це відповідає дискретизації неперервної системи і одержання дискретної передавальної функції цифрової моделі в z -площині.

А тепер справдімо, чи одержана дискретна передавальна функція цифрової моделі має так само два полюси, як і неперервний прототип з передавальною функцією $W_2(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$ використовуючи канонічну форму спостережності (рис. 1, [5]). Замінивши неперервний інтегратор (див. рис. 1) цифровим інтегратором з дискретною передавальною функцією $W_i(z)$ після елементарних алгебричних перетворень одержимо дискретну передавальну функцію цифрової моделі ланки другого порядку:

$$W_2(z) = \frac{W_i^2(z)}{a_0 W_i^2(z) + a_1 W_i(z) + a_2} \quad (2).$$

Зверніть увагу, що нулі та полюси цифрового інтегратора будуть додані до дискретної передавальної функції цифрового аналога неперервної системи. Замінивши $W_i(z)$ на $W_4^{AB}(z)$ у цьому рівнянні, отримаємо дискретну передавальну функцію цифрової моделі з використанням явного числового інтегратора Адамса четвертого порядку:

$$W_2(z) = \frac{(81z^6 + 342z^5 + 271z^4 - 172z^3 + 63z^2 - 10z + 1)h^2}{d_6 z^6 + d_5 z^5 + d_4 z^4 + d_3 z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0} \quad (3),$$

де коефіцієнти полінома дискретної передавальної функції четвертого порядку будуть такими:

$$d_0 = a_0 h^2;$$

$$d_1 = -10a_0 h^2;$$

$$d_2 = 63a_0 h^2 - 24a_1 h;$$

$$d_3 = -172a_0 h^2 + 144a_1 h;$$

$$d_4 = 271a_0 h^2 - 576a_1 h + 576a_2;$$

$$d_5 = 342a_0 h^2 + 240a_1 h - 1152a_2;$$

$$d_6 = 81a_0h^2 + 216a_1h + 576a_2.$$

В одержаній дискретній передавальній функції з'явилося 6 незалежних від величини кроку h дискретних нулів і 6 дискретних полюсів. Зауважимо, що коефіцієнти полінома знаменника залежать від величини кроку h , що викликає, відповідно, переміщення дискретних полюсів комплексною площиною залежно від значення кроку h . Для деякої величини кроку ці полюси можуть вийти за межі області стабільності.

Але відзначимо найголовніше – поведінка системи з 6 нулями і 6 полюсами відрізняється від поведінки системи з лише 2 полюсами. Більше того, ситуація лише погіршується зі зростанням порядку числового методу внаслідок зростання кількості додаткових нулів і полюсів.

Візьмемо до розгляду тестове електричне коло другого порядку (рис. 2) [2], яким доволі часто можна описати елементи електричних та електроенергетичних систем і для якої просто знаходяться операторним методом Хевісайда [4] аналітичні вирази для вихідних координат з метою перевірки. Простота даного прикладу, тим не менше, дає змогу легко провести необхідний повний аналіз, не вдаючись до складних перетворень.

Комп'ютерні дослідження проводилися на вказаному колі для визначення невідомої напруги на конденсаторі $U_C(t)$. Перехідний процес знаходився для випадку нульових початкових умов і підімкнення джерела напруги E . Одержані результати порівнювалися з аналітичним розв'язком операторним методом Хевісайда (перетворення Лапласа).

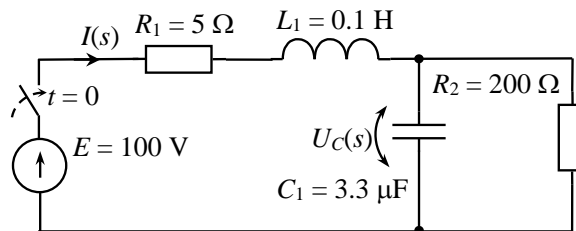


Рис. 2. Тестове коло [2]

Напруга на конденсаторі $U_C(s)$ у цьому випадку матиме таке відображення за Лапласом:

$$U_C(s) = I(s) \cdot \frac{R_2 C_1 s}{R_2 + C_1 s} \quad (3),$$

$$\text{де } I(s) = \frac{E/s}{Z(s)} \text{ і } Z(s) = R_1 + L_1 s + \frac{R_2 C_1 s}{R_2 + C_1 s}.$$

Після елементарних алгебричних перетворень одержимо відображення за Лапласом напруги на конденсаторі, яке знаходять оберненим перетворенням Лапласа:

$$U_C(s) = \frac{R_2 \cdot E/s}{L_1 C_1 R_2 s^2 + (R_1 R_2 C_1 + L_1)s + R_1 + R_2} \quad (4).$$

Звернемо увагу, що поведінка системи визначається 2 полюсами.

Комп'ютерні розрахунки проведені в середовищі математичного застосунку MATLAB [8] з бібліотекою Control Systems Toolbox [9] і показані на рис. 3 для мапи розподілу нулів/полюсів і кроку $h = 10^{-4}$ с.

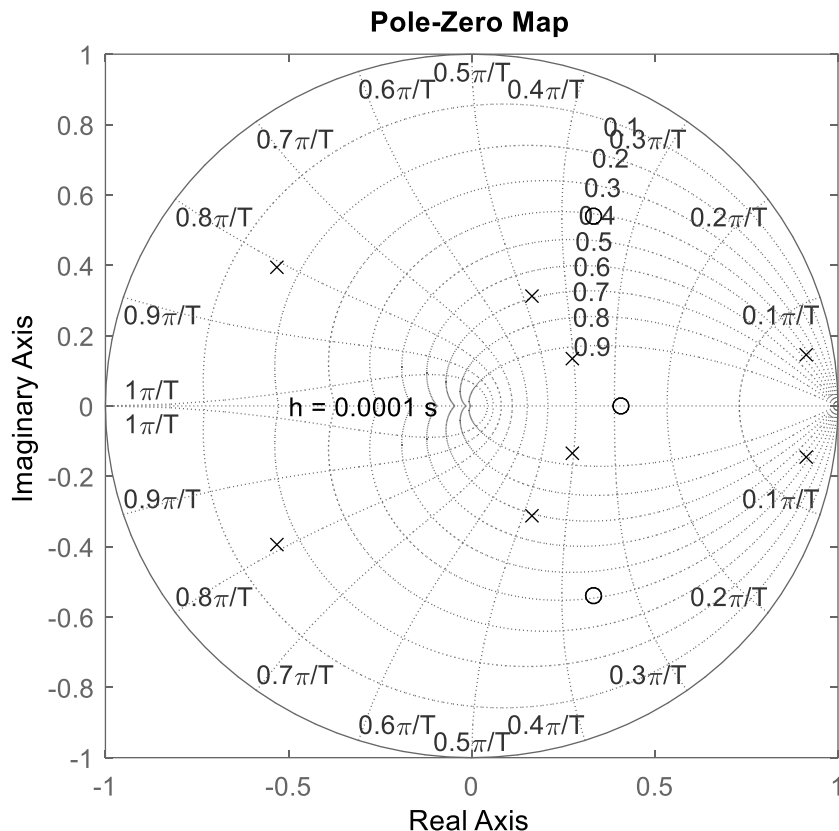


Рис. 3. Розподіл нулів/поліосів для кроку розв'язування $h = 0.0001$ с

Аналогічні результати одержано й для інших числових методів і кроків розв'язування, що підтвердило висунуті положення.

Висновки

Аналіз передавальних функцій цифрових моделей, які одержані дискретизацією неперервного прототипу з використанням числових методів високого порядку, призводить до ускладнення результуючої комп'ютерної моделі. Таке ускладнення викликане внесенням в дискретні передавальні функції цифрових моделей додаткових нулів і поліосів порівняно з вихідною неперервною системою, що, відповідно, змінює її поведінку. Таким чином, внаслідок наведених вище міркувань впливає доволі несподіваний висновок: числові методи розв'язування диференціальних рівнянь високого порядку є неефективними для моделювання електротехнічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] High Performance Computing in Power and Energy Systems / Siddhartha Kumar Khaitan and Anshul Gupta (Eds.) // Power Systems Series. – Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2013. – 384 p. [ISBN 978-3-642-32682-0]
- [2] Volodymyr Moroz, Anastasia Vakarchuk. Numerical Integrators on Electrical Circuits' Transient Calculation // 22nd International Conference “Computational Problems of Electrical Engineering” (CPEE-2021), September 15-17th, Šumava, Czech Republic.
- [3] Volodymyr Moroz, Anastasia Vakarchuk. Why High-Order Integrators Not Rational on Electrical Systems' Computer Calculation // IEEE 20th International Conference on Modern Electrical and Energy System September 21-24, 2021. Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Ukraine.
- [4] Gustafson G. Heaviside's Method / Grant B. Gustafson // Mathematics Department University of Utah, Salt Lake City. – 2018. – [Access mode]: <http://www.math.utah.edu/~gustafso/HeavisideCoverup.pdf>
- [5] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop. Modern Control Systems. 12th Edition. – USA: Pearson, 2010. – [ISBN-13: 978-0136024583]. – 1104 p.
- [6] E. Hairer, S. Nørsett, G. Wanner. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 2nd Edition. Springer, 2008. [ISBN 978-3-540-56670-0].

- [7] V. Moroz, A. Vakarchuk. Influence of the numerical method sampling on the digital PID-controller behavior // Electrical Power and Electromechanical Systems (SEPES), 2020, Vol. 2, No. 1s, pp. 35-45. <https://doi.org/10.23939/sepes2020.01s.035>
- [8] MATLAB: The Language of Technical Computing. – [Access mode] <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- [9] Control System Toolbox: Design and analyze control systems. – [Access mode] <https://www.mathworks.com/products/control.html>

Стаття надійшла до редакції ____2021

Мороз Володимир Іванович — д.т.н., професор, професор кафедри електромехатроніки та комп'ютеризованих електромеханічних систем.

e-mail: volodymyr.i.moroz@lpnu.ua

Вакарчук Анастасія Борисівна — аспірантка кафедри електромехатроніки та комп'ютеризованих електромеханічних систем.

e-mail: anastasiia.b.vakarchuk@lpnu.ua

Національний університет «Львівська політехніка», Львів;

V.I.Moroz¹
A.B.Vakarchuk¹

NUMERICAL INTEGRATORS IN CALCULATIONS OF ELECTRICAL CIRCUITS

¹Lviv polytechnic national university

Modeling of transients in complex electrical systems, some of which (for example, branched power systems) describe by thousands of differential equations, is quite a problem even for the current level of computer technology and methods for solving ordinary differential equations [1]. The problem is that in the case of applying numerical methods at the behavior of the studied system is also superimposed on the behavior of the numerical method used. As shown in [2, 3], due to the discretization of the continuous model of the technical system by numerical integrators, additional zeros and poles of the resulting discrete transfer function appear in the obtained digital model. As a result, a complication of the resulting digital model of the electrotechnical system is increasing comparatively with an analog prototype. The problem is exacerbated in the case of high-speed founded in electrical circuits in real-time (real-time calculation) or even faster for the operational management of networks [1]. The same applies to modern digital control systems, which are based on object's models or using observers of controlled parameters.

Keywords: electric circuit, numerical integrators, numerical methods, discretization, zeros/poles.

Moroz Volodymyr I. - Ph.D., Professor, Professor of the Institute of Power Engineering and Control Systems;

e-mail: volodymyr.i.moroz@lpnu.ua

Vakarchuk Anasyasiia B. – PhD student of the Institute of Power Engineering and Control Systems;

e-mail: anastasiia.b.vakarchuk@lpnu.ua

Lviv polytechnic national university, Lviv