

ФІЗИКА МУЗИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ: СТОЯЧІ ХВИЛІ І РЕЗОНАНС

Вінницький національний технічний університет
Кафедра загальної фізики

Анотація

Дослідження присвячене вивченню фізико-математичних основ музики. Проаналізовано процес утворення музичного тону як результату стоячих хвиль у резонаторах інструментів. На основі теорії гармонійного ряду показано математичну модель спектра звуку, що пояснює природу тембру. Розглянуто фізичні принципи гармонії та дисонансу, пов'язані з явищами інтерференції та биття, історично відкриті Піфагором. Окреслено психоакустичні механізми перетворення об'єктивних акустичних параметрів у суб'єктивне слухове сприйняття та емоційну реакцію. Робота доводить, що музика є продуктом резонансу між законами фізики, математичною закономірністю та біологією сприйняття.

Ключові слова: стоячі хвилі, резонанс, музичні інструменти, гармонійний ряд, обертони, тембр, консонанс, дисонанс, биття, психоакустика.

Abstract

The study is devoted to the investigation of the physical and mathematical foundations of music. The process of musical tone formation as a result of standing waves in instrument resonators is analyzed. Based on the harmonic series theory, a mathematical model of the sound spectrum is presented, explaining the nature of timbre. The physical principles of harmony and dissonance, related to the phenomena of interference and beats and historically discovered by Pythagoras, are considered. The psychoacoustic mechanisms of transforming objective acoustic parameters into subjective auditory perception and emotional response are outlined. The work proves that music is a product of the resonance between the laws of physics, mathematical regularity, and the biology of perception.

Keywords: standing waves, resonance, musical instruments, harmonic series, overtones, timbre, consonance, dissonance, beats, psychoacoustics.

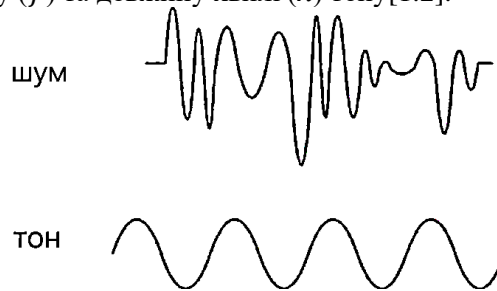
Вступ

Музика, здавалося б, цілком належить до царини емоцій та мистецтва, тоді як математика — суворий світ логіки та формул. Який же зв'язок може бути між ними? Наша мета сьогодні — це чудова нагода знайти відповіді на це питання та довести, що зв'язок між музикою та математикою не просто існує, а лежить в самій основі звуку. Цей зв'язок починається з найпростішого фізичного явища: звук — це механічні коливання частинок повітря, що поширюються у вигляді хвиль тиску. Ці коливання можна виміряти, описати функцією та відобразити у вигляді графіка, наприклад, синусоїди. Але як ці об'єктивні, фізичні коливання перетворюються на суб'єктивне почуття мелодії, гармонії та емоцій? Подорож звуку в нашому організмі — це дивовижний процес перетворення. Звукові хвилі потрапляють у вушну раковину, змушують вібрувати барабанну перетинку, а потім через ланцюжок кісточок молоточок, коваделко та стремінце — передаються до рідини внутрішнього вуха. Ключове перетворення відбувається в равлику, де чутливі волоскові клітини перетворюють механічну енергію руху рідини в електричні нервові імпульси. Саме ці імпульси мозок аналізує та інтерпретує, створюючи наше сприйняття звуку. Отже, музична насолода має сувору фізико-біологічну основу, і ми можемо дослідити її за допомогою мови математики та законів фізики.

Результати дослідження

Музичні інструменти виробляють особливий вид звуків — тони, які народжуються з стоячих хвиль, що утворюються в корпусі інструмента або на його елементах (наприклад, струні). Властивості цих стоячих хвиль, які виникають лише за дуже конкретних умов у визначених серіях (рядах), мають фундаментальний вплив на всю теорію музики. Хоча більшість звукових хвиль, що досягають нашого вуха, не є стоячими (це хвилі, які затухають), музичні інструменти працюють на принципі локалізації хвиль. Вони створюють звук, змушуючи хвилі циклічно битись між двома або більше границями,

наприклад, між кінцями струни або стінками резонатора. Чому ж стоячі хвилі так важливі для музики? Будь-який набір звукових хвиль створює певний шум. Однак, щоб стати тоном — звуком з чітко визначеною висотою — група хвиль має бути високо регулярною: хвилі повинні мати однакову форму та бути розташовані на строго однаковій відстані одна від одної. Саме ця регулярність дозволяє говорити про частоту (f) та довжину хвилі (λ) тону[1.2].



Шум — це хаотичне скупчення хвиль різної довжини. Тон — це впорядкований, регулярний набір ідентичних хвиль.

Основні характеристики будь-якої звукової хвилі:

1. Частота (f) — кількість повних коливань за секунду. Вимірюється в Герцах (Гц). Визначає висоту тону: чим вища частота, тим вищий звук.
2. Амплітуда (A) — максимальне відхилення від положення рівноваги. Визначає силу (гучність) звуку: чим більша амплітуда, тим голосніший звук.
3. Тривалість — час, протягом якого тривають коливання.

Співвідношення між частотою (f), довжиною хвилі (λ) та швидкістю поширення звуку (v , у повітрі при кімнатній температурі ≈ 343 м/с) описується фундаментальною формулою:

$$v = \lambda \cdot f$$

Людське вухо сприймає звуки в діапазоні частот приблизно від 16-20 Гц до 16-20 000 Гц, причому максимальна чутливість знаходиться у діапазоні людського мовлення (1000-4000 Гц).

Механізми сприйняття висоти тону мозком складні:

- Для високих частот (понад 1000 Гц) працює механізм просторового кодування. Звукова хвиля створює в рідині раулика вуха область максимальної амплітуди, місце якої залежить від частоти: для високих частот вона ближче до основи раулика, для низьких — до його верхівки. Різні ділянки сприймаються різними нервовими рецепторами.
- Для низьких частот (до 1000 Гц) може діяти телефонний (залповий) механізм, коли частота нервових імпульсів відповідає частоті звукової хвилі.

Спектральний склад тону. Теорія стоячих хвиль

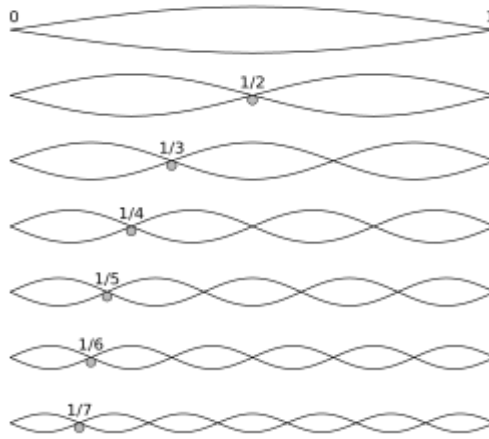
Поняття ряду та нескінченної суми в математиці має глибокий зв'язок із музикою. Окрім відомих рядів (геометричних, для π , для e), існує особливо природний гармонійний ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Його зв'язок із звуком стає очевидним, якщо розглянути натуральний (гармонічний) звукоряд. Це ряд частот, що утворюється основним тоном та його гармонічними обертонами, які є цілими кратними основної частоти (f_0):

$$f_n = n \cdot f_0, \text{ де } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Для ноти "Ля" ($f_0=110$) ряд буде: 110 Гц, 220 Гц, 330 Гц, 440 Гц, 550 Гц і так далі. Співвідношення частот у такому ряді відповідає натуральному ряду чисел: 1:2:3:4:5...



Цей ряд виникає фізично в музичних інструментах через утворення стоячих хвиль. Розглянемо струну довжиною L , закріплену з обох кінців. На ній можуть виникати лише такі стоячі хвилі, де на кінцях утворюються вузли (точки нульових коливань). Ця умова задає допустимі довжини хвиль (λ_n):

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}, \text{ де } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Тобто, на струні може вміститися ціле число півхвиль ($n/2$).

Частота коливань (f_n) пов'язана з довжиною хвилі (λ_n) та швидкістю поширення хвилі по струні (v) формулою $v = f_n \cdot \lambda_n$. Швидкість v залежить від натягу струни (T) та її лінійної густини (μ):

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

Об'єднуючи ці формули, отримуємо дискретний спектр частот струни:

$$f_k = k \cdot \frac{v}{2L} = k \cdot f_1, \text{ де } k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

де $f_1 = \frac{v}{2L}$ — основна частота (фундаментальна, перша гармоніка).

Таким чином, коли ми збуджуємо струну, вона вібрує не лише на основній частоті f_1 , а одночасно на всіх її цілих кратних $2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$. Ці вищі частоти називаються обертонами або гармоніками. Друга гармоніка ($2f_1$) — це перший обертон, третя ($3f_1$) — другий обертон і так далі. Кожній гармоніці відповідає своя форма стоячої хвилі з певною кількістю вузлів і пучностей (точок максимальної амплітуди). Саме набір та відносна сила цих обертонів визначають тембр — якісну окрасу звуку, завдяки якій ми відрізняємо звучання різних інструментів, що грають одну й ту саму ноту.

Фізика консонансу та дисонансу (явище биття)

Фізичною основою гармонії та дисгармонії є принцип суперпозиції (накладання) хвиль. Коли дві або більше хвиль зустрічаються в одній точці, їхні збурення (амплітуди) алгебраїчно додаються. Це призводить до явища інтерференції, яка буває конструктивною (посилення) або деструктивною (ослаблення)[3].

- Чисто конструктивна інтерференція: виникає, коли гребені (максимуми) двох однакових хвиль точно збігаються. Їх амплітуди складаються, утворюючи хвилю з подвійною амплітудою.
- Чисто деструктивна інтерференція: виникає, коли гребінь однієї хвилі збігається зі западиною (мінімумом) іншої. Їх амплітуди взаємно знищуються, що призводить до тиші [9].

Стоячі хвилі є особливим випадком інтерференції, що виникає при накладанні двох однакових хвиль, що біжать назустріч одна одній. Утворюється картина з нерухомими вузлами (точки нульових коливань) та пучностями (точки максимальної амплітуди).

Ключовим для музики є явище биття. Воно виникає при суперпозиції двох звукових хвиль з близькими, але не однаковими частотами f_1 та f_2 . Результуючий звук має середню частоту, але його гучність періодично зростає і спадає. Ця частота пульсації називається частотою биття і дорівнює абсолютній різниці вихідних частот:

$$f_b = |f_1 - f_2|$$

Биття є об'єктивною фізичною причиною відчуття дисонансу (неспівзвуччя). Чим складніше (далі від простих дробів) співвідношення частот двох тонів, тим більше виникає швидких, різних бить, що сприймаються як неприємна, напружена звукова "боротьба". Навпаки, консонанс (співзвуччя) виникає

при простих співвідношеннях частот, коли обертони тонів багаторазово збігаються, мінімізуючи биття та створюючи відчуття стабільності та завершеності.

Цю закономірність емпірично встановив Піфагор (бл. 570-495 до н.е.). За легендою, він помітив, що молотки певної ваги при ударі видають тони, що утворюють приємні інтервали. Досліджуючи монохорд (пристрій з натягнутою струною), Піфагор виявив, що природа гармонії має математичну основу: при діленні струни на частини в простих співвідношеннях виходять основні консонантні інтервали:

- Октава (2:1): струна поділена навпіл.
- Квінта (3:2): струна поділена у співвідношенні 2:3.
- Кварта (4:3): струна поділена у співвідношенні 3:4.

Таким чином, Піфагор заклав основи зв'язку музики з математикою, показавши, що гармонійні інтервали визначаються простими цілими співвідношеннями. Цей принцип ляг в основу піфагорійського ладу і став першим кроком до розуміння музики як фізико-математичного явища, що породило ідею "музики сфер" — впорядкованого, гармонійного Всесвіту, підпорядкованого числовим законам.

Перетворення акустичних параметрів у слухове сприйняття

Сприйняття звуку людиною — це складний процес, що поєднує фізику та біологію. Звукова хвиля, як поздовжня хвиля тиску, характеризується не тільки частотою та амплітудою, але й тембром — якісною ознакою, що залежить від спектрального складу (набору обертонів) та їх відносної амплітуди.

Людське вухо сприймає обмежений діапазон частот (20 Гц — 20 кГц). Порівняно з тваринами (наприклад, собаки чують до 45 кГц, кажани — до 120 кГц), людський слух спеціалізований для сприйняття мови та соціальної комунікації. Однак саме в цьому діапазоні лежить вся багатогранність музики. Психоакустика — наука на стику фізіології, психології та фізики — вивчає, як фізичні параметри звуку (частота, інтенсивність, спектр) перетворюються на суб'єктивні відчуття (висота, гучність, тембр, розташування джерела) та емоційні реакції. Зв'язок звуку с емоціями має нейробіологічну основу. Звукові сигнали активують не тільки слухову кори, а й лімбічну систему мозку, яка відповідає за емоції, мотивацію та довготривалу пам'ять. Це пояснює потужний вплив музики на настрій, здатність мелодій викликати ностальгію або асоціації, а також їх використання в терапевтичних цілях. Сучасні технології (персоналізовані профілі слуху, адаптивні еквалайзери) спрямовані на те, щоб адаптувати звучання під індивідуальні особливості сприйняття кожної людини. Враховуючи анатомію вуха, чутливість до різних частот та акустику середовища, вони прагнуть створити максимально комфортний, натуральний і емоційно забарвлений звуковий досвід. Таким чином, музика — це не просто послідовність фізичних коливань. Це результат складного резонансу між об'єктивними законами природи (стоячі хвилі, гармонічні ряди, інтерференція) та суб'єктивною, нейрофізіологічно обумовленою реакцією нашого мозку. Розуміння цього резонансу відкриває шлях до свідомого формування звукового середовища, яке може покращувати самопочуття, підвищувати продуктивність та приносити естетичне задоволення.

Висновки

На основі проведеного дослідження можна дійти таких висновків. Музика є природним явищем, закони якого ґрунтуються на фундаментальних принципах фізики та математики. Фізичною основою музики є звук, що представляє собою механічну хвилю, яку можна точно описати та виміряти за допомогою кількісних характеристик. Музичні тони утворюються стоячими хвилями в резонаторах інструментів. Саме регулярність цих хвиль забезпечує стабільність частоти, що є основою музичної висоти.

Математично спектр будь-якого музичного тону описується гармонійним (натуральним) рядом за формулою $f_n = n \cdot f_1$. Це означає, що кожна нота містить не лише основну частоту, але й цілий набір обертонів, кратних до неї. Темброва окраска звуку, що дозволяє розрізняти інструменти, фізично зумовлена унікальним співвідношенням амплітуд цих обертонів у кожного джерела звуку.

Співзвучність (консонанс) та неспівзвучність (дисонанс) мають об'єктивну фізичну причину, пов'язану з явищами інтерференції та биття. Приємне звучання виникає при простих цілочисельних співвідношеннях частот (2:1, 3:2, 4:3), які мінімізують биття. Навпаки, складні співвідношення породжують інтенсивні биття, що сприймаються як дисонанс. Цю закономірність, що є фундаментом зв'язку музики з математикою, було емпірично виявлено ще Піфагором. Психоакустичні дослідження показують, як фізичні параметри звуку перетворюються мозком на суб'єктивні слухові відчуття та

емоційні реакції. Вплив музики на лімбічну систему мозку пояснює її здатність викликати специфічні емоційні стани, що має терапевтичне та соціальне значення. Отже, музику можна розглядати як результат складної взаємодії об'єктивних законів фізичного світу та біології людського сприйняття. Вивчення цієї взаємодії відкриває практичні можливості для створення більш якісного та ефективного звукового середовища.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Курс загальної фізики. Т. 1: Механіка. Коливання та хвилі.— Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. — 400 с.
2. Іваненко М. О., Петренко С. В. Фізика звуку і музики : навчальний посібник. — Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2018. – 312 с.
3. Корякін Д. В. Основи музичної акустики : конспект лекцій. — Суми : Сумський держ. пед. ун-т ім. А. С. Макаренка, 2020. – 158 с.

Шпак Віктор Сергійович, Вінницький національний технічний університет, Факультет електроденергетики та електромеханіки, 1-й курс, група ЕС-25б, shpakvictor2912@gmail.com
Науковий керівник: **Лисий Михайло Вікторович** - к. ф.-м. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра фізики.