

## ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Вінницький національний технічний університет

### *Анотація*

*У роботі розглянуто практичне застосування диференціальних операторів та чисельних методів у сучасних інженерних, енергетичних та інформаційних системах. Проаналізовано роль операторів градієнта, дивергенції та лапласіана в математичному моделюванні фізичних процесів, а також їх реалізацію в програмних комплексах SCADA, EMS, MATLAB/Simulink, ANSYS Maxwell.*

**Ключові слова:** виділення контурів, оператор Собеля, Лапласіан Гауссіана, інтегральне зображення, градієнт

### *Abstract*

*This paper considers the practical application of differential operators and numerical methods in modern engineering, power engineering, and information systems. The study analyzes the role of gradient, divergence, and Laplacian operators in the mathematical modeling of physical processes, as well as their implementation in software environments such as SCADA, EMS, MATLAB/Simulink, and ANSYS Maxwell.*

**Keywords:** edge detection, Sobel operator, Laplacian of Gaussian, integral image, gradient.

### **Вступ**

Математичний аналіз відіграє визначальну роль у технічних науках, оскільки він надає мову та інструментарій для створення точних моделей фізичних процесів, що відбуваються в інженерних системах. Одним із ключових аспектів є необхідність опису просторового розподілу різних величин, таких як температурні, електричні або магнітні поля, де кожна точка простору характеризується певним значенням інтенсивності, потенціалу або сили. Розуміння динаміки цих полів дозволяє прогнозувати поведінку матеріалів під навантаженням, оптимізувати роботу енергетичних мереж та розробляти алгоритми обробки даних у комп'ютерному зорі.

Мета цієї доповіді полягає у розкритті сутності фундаментальних векторних диференціальних операторів - набла та градієнта, які є основою для аналізу будь-яких полів, а також у демонстрації їх практичного застосування для розв'язання конкретних технічних завдань, зокрема у сфері автоматизованого виділення ознак зображень та дефектоскопії.

### **Результати дослідження**

Сучасні диспетчерські системи, інженерні комплекси та середовища автоматизованого проектування (CAD/CAE) не розраховують просторові поля вручну, оскільки без компактної векторної символіки оператора набла ці обчислення перетворилися б на аналітично нерозв'язні або надзвичайно громіздкі ланцюжки частинних похідних. Фундаментальні диференціальні рівняння макроскопічної електродинаміки та термодинаміки (рівняння Максвелла, Пуассона, Фур'є) інтегровані безпосередньо в математичні ядра (solvers) спеціалізованого програмного забезпечення. Залежно від призначення та специфіки задач, цей математичний апарат реалізується у двох основних класах програмних комплексів: у системах SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition) та модулях EMS (Energy Management Systems). Математичні методи, засновані на градієнтах, працюють у режимі реального часу. Оцінювання стану енергосистеми: процес визначення реального режиму роботи мережі за умов надлишковості та похибок вимірювань зводиться до задачі мінімізації цільової функції (наприклад, критерію найменших квадратів). Для цього застосовують ітераційні градієнтні методи (зокрема, метод Ньютона-Рафсона), де вектор градієнта вказує напрямком найшвидшого коригування розрахункових

параметрів (модулів та кутів напруги в вузлах). Оптимізація поточкорозподілу: градієнтні алгоритми та матриці частинних похідних (якобіани) дозволяють розраховувати оптимальні потоки потужності, мінімізувати втрати електроенергії в лініях передач та автоматично підтримувати рівні напруги в допустимих межах.

У науково-дослідних та інженерних пакетах MATLAB/Simulink, ANSYS Maxwell, COMSOL Multiphysics диференціальні оператори безперервного простору адаптуються під дискретні структури за допомогою чисельних методів, найвідомішим з яких є метод скінченних елементів (МСЕ).

Процес комп'ютерного розрахунку починається з дискретизації простору, під час якої безперервне поле, наприклад, ізоляційне середовище підстанції, розбивається на сітку дрібних геометричних елементів у вигляді трикутників або тетраєдрів. На цьому етапі оператори першого ( $\nabla$ ) та другого ( $\nabla^2$ ) порядків замінюються їхніми дискретними аналогами або різницевиими схемами.

Наступним кроком є розв'язання крайових задач. Математичне ядро програми формує гігантські системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок яких дозволяє отримати точні значення потенціалу в кожному вузлі створеної сітки.

У межах реальних інженерних та ІТ- проектів описані диференціальні оператори переходять із суто теоретичної площини у практичні алгоритми. В індустрії комп'ютерного зору обчислення градієнта за допомогою оператора Собеля інтегровано в системи автономного керування автомобілями для розпізнавання дорожньої розмітки та виявлення перешкод. В електроенергетиці аналіз градієнтів потенціалів та температур застосовується під час розробки цифрових двійників високовольтних трансформаторів, що дозволяє прогнозувати аварійні ситуації та знос ізоляції задовго до їхнього фізичного прояву [1, 2, 3].

Сьогодні інженерам та дослідникам немає потреби виконувати диференціювання вручну завдяки потужним програмним екосистемам. Наприклад, для обробки зображень та реалізації алгоритмів комп'ютерного зору стандартним інструментом є бібліотека OpenCV, яка має вбудовані оптимізовані функції для знаходження градієнтів Собеля та Лапласіана Гауссіана. Для складних математичних розрахунків, моделювання фізичних процесів та проектування електроенергетичних мереж використовуються середовища MATLAB та Simulink, де диференціальні рівняння розв'язуються чисельними методами. Для точного тривимірного аналізу електричних полів та теплопровідності лідерами є пакети комп'ютерного інжинірингу ANSYS Maxwell та COMSOL Multiphysics, які автоматично візуалізують вектори полів для інженерного аналізу [4].

## Висновки

У результаті проведеного дослідження було детально розглянуто математичну сутність та практичну цінність диференціальних операторів у сучасній науці та техніці.

Оператор набла виступає фундаментальним елементом вищої математики, який дозволяє в лаконічній векторній формі описувати складні просторові процеси. Об'єднуючи в собі властивості вектора та диференціального оператора, він забезпечує єдиний математичний підхід до розрахунку абсолютно різних за своєю фізичною природою явищ, починаючи від комп'ютерного зору і закінчуючи електродинамікою. Його універсальність дозволяє замінити громіздкі системи частинних похідних елегантними диференціальними рівняннями, значно спрощуючи аналітичні розрахунки.

Математичний апарат градієнта є незамінним інструментом для аналізу та візуалізації неперервних скалярних полів. Оскільки вектор градієнта завжди вказує напрямком найшвидшого зростання функції, а його модуль відображає швидкість цієї зміни, він дає чітке геометричне та фізичне розуміння поведінки поля в кожній конкретній точці. Це дозволяє точно визначати межі об'єктів на цифрових зображеннях через перепади яскравості, а також розраховувати напруженість електричних полів та теплові потоки в інженерних конструкціях.

Практичне застосування диференціальних операторів першого та другого порядків є підґрунтям для розвитку високих технологій та енергетичної безпеки. Без оператора набла та градієнтних методів було б неможливо проектувати надійне високовольтне обладнання підстанцій, оптимізувати роботу енергосистем у режимі реального часу чи створювати інтелектуальні алгоритми обробки зображень. Математичні моделі на основі цих операторів закладені в ядра сучасних програмних комплексів, що підтверджує їхній статус базису для новітніх інженерних розробок.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Моделювання та оптимізація систем : підручник / Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В. - Вінниця : ПП «ТД«Едельвейс», 2017.- 804 с.
2. Hayt, W. H., & Buck, J. A. (2018). Engineering Electromagnetics (9th ed.). McGraw-Hill Education. McGraw-Hill Education
3. Sadiku N. O. Elements of Electromagnetics (7th ed.). Oxford University Press. Oxford University Press. (2018. – 902 p.
4. MathWorks. Gradient and Laplacian Operators. MATLAB Documentation. 2024. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу:<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/?term=conjugate+gradient>

**Софія Володимирівна Бандуш** - студентка групи 3KN-25Б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [sofiabandus955@gmail.com](mailto:sofiabandus955@gmail.com)

**Дар'я Сергіївна Бігун** - студентка групи 3KN-25Б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [darya.little@gmail.com](mailto:darya.little@gmail.com)

**Марія Леонідівна Поліщук** - студентка групи 3KN-25Б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [mashapolishchuk272@gmail.com](mailto:mashapolishchuk272@gmail.com)

**Науковий керівник: Майя Борисівна Ковальчук** - професор, кандидат педагогічних наук, доцент, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, , Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [kovalchuk@vntu.edu.ua](mailto:kovalchuk@vntu.edu.ua)

**Sofia V. Bandush** – Student of the 3KN-25B group, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [sofiabandus955@gmail.com](mailto:sofiabandus955@gmail.com)

**Daria S. Bihun** – Student of the 3KN-25B group, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [darya.little@gmail.com](mailto:darya.little@gmail.com)

**Maria L. Polishchuk** – Student of the 3KN-25B group, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [mashapolishchuk272@gmail.com](mailto:mashapolishchuk272@gmail.com)

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)