

МАТРИЦІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Анотація

У статті розглянуто основні напрями застосування матриць у математиці та прикладних задачах. Показано роль матриць у геометричних перетвореннях, комп'ютерній графіці, економічному моделюванні, статистиці, теорії ймовірностей, криптографії та інформаційних технологіях. Особливу увагу приділено практичному значенню матричних методів у сучасних технічних системах, зокрема в навігації та керуванні безпілотними літальними апаратами. Наведено приклади використання матриць для опису руху, обробки даних і моделювання станів систем. Підкреслено, що матриці є важливим інструментом математичної підготовки майбутніх інженерів.

Ключові слова: матриці, матричні перетворення, комп'ютерна графіка, економічне моделювання, криптографія, теорія ймовірностей, безпілотні літальні апарати.

Abstract

The report examines the main areas of matrix application in mathematics and applied problems. The role of matrices in geometric transformations, computer graphics, economic modeling, statistics, probability theory, cryptography, and information technologies is shown. Special attention is paid to the practical importance of matrix methods in modern technical systems, in particular in the navigation and control of unmanned aerial vehicles. Examples of the use of matrices for describing motion, data processing, and modeling system states are provided. It is emphasized that matrices are an important tool in the mathematical training of future engineers.

Keywords: matrices, matrix transformations, computer graphics, economic modeling, cryptography, probability theory, unmanned aerial vehicles.

Вступ

Матриці є одним із найважливіших інструментів сучасної математики. Вони виникли як зручний спосіб запису систем лінійних рівнянь, але з часом стали універсальною мовою для опису багатьох процесів у науці, техніці та економіці [1]. Сьогодні матричні методи застосовуються під час обробки зображень, побудови тривимірної графіки, аналізу електричних кіл, прогнозування економічних показників, роботи пошукових алгоритмів та навчання нейронних мереж.

Актуальність теми полягає в тому, що майже кожна інженерна або інформаційна задача, де потрібно працювати з великою кількістю числових даних, природно переводиться у матричну форму. Саме тому розуміння властивостей матриць є важливим для студентів технічних спеціальностей.

Результати дослідження

Матриці в геометрії та комп'ютерній графіці. Одне з найцікавіших прикладних застосувань матриць пов'язане з геометричними перетвореннями. За допомогою матриць можна описати поворот, розтягнення, віддзеркалення та перенесення фігур. Наприклад, поворот точки на площині на кут φ задається множенням вектора координат на матрицю повороту [3].

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

Тобто якщо точка має координати (x, y) , то після повороту її нові координати обчислюються за формулою:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

Таке задання перетворень є дуже зручним, оскільки одна й та сама математична схема може застосовуватися до великої кількості точок і фігур одночасно. Саме тому матриці широко

використовуються не лише в теоретичній геометрії, а й у практичних задачах моделювання руху та форми об'єктів [2].

У комп'ютерній графіці матриці є основою побудови анімації та тривимірних сцен. Кожний об'єкт у 2D та 3D-просторі має координати, які багаторазово змінюються під час обертання камери, масштабування, зміни положення чи проекції на екран. Саме матричні перетворення дозволяють виконувати ці операції швидко і в стандартизованому вигляді. Без матриць неможливо уявити сучасні відеоігри, САД-системи, 3D-моделювання та комп'ютерну візуалізацію [2].

Крім того, матриці застосовуються у системах автоматизованого проектування деталей, архітектурному моделюванні та симуляторах руху. У сучасних технічних системах, зокрема в навігації безпілотних літальних апаратів, матричні перетворення використовуються для опису положення, орієнтації та зміни координат об'єкта у просторі. Це дає змогу точно визначити траєкторію руху, врахувати зміну напрямку та положення камери або датчиків [2, 3].

Матриці в економіці, статистиці та теорії ймовірностей. У прикладній економіці матриці використовують для побудови балансових моделей, аналізу взаємозв'язків між галузями виробництва та прогнозування результатів діяльності підприємств. Наприклад, модель міжгалузевого балансу В. Леонтьєва ґрунтується на матричному описі потоків ресурсів між різними секторами економіки.

У статистиці матриці застосовуються для збереження та обробки великих масивів даних, а також для побудови кореляційних і коваріаційних матриць [2]. У теорії ймовірностей важливу роль відіграють матриці переходів. Вони описують ймовірності переходу системи з одного стану в інший. Саме на цій ідеї базуються марковські ланцюги, які використовуються в аналізі поведінки користувачів, розпізнаванні мовлення, прогнозуванні станів систем і навіть у принципах ранжування вебсторінок.

У теорії ймовірностей важливу роль відіграють матриці переходів. Вони описують ймовірності переходу системи з одного стану в інший. Саме на цій ідеї базуються марковські ланцюги, які використовуються в аналізі поведінки користувачів, прогнозуванні станів систем, розпізнаванні послідовностей дій та моделюванні випадкових процесів. Отже, матриці дають змогу не лише описувати стан системи, а й досліджувати її розвиток у часі [2].

Матриці в криптографії та інформаційних технологіях. Ще одним цікавим напрямом є використання матриць у криптографії. Один з класичних прикладів - шифр Гілла, у якому повідомлення перетворюється на числові вектори, а далі множиться на спеціальну ключову матрицю [3]. Якщо матриця вибрана правильно, отримуємо зашифрований текст, який можна розшифрувати лише за наявності оберненої матриці.

Хоча шифр Гілла належить до класичних методів, сама ідея використання матричних перетворень у захисті даних залишається важливою і сьогодні. Матриці дозволяють зручно формалізувати процеси кодування, перетворення та передавання інформації. Саме тому вони посідають важливе місце у підготовці фахівців з комп'ютерних наук, кібербезпеки та інформаційних технологій [3, 6].

У сучасних інформаційних технологіях матриці лежать в основі машинного навчання [3]. Дані про об'єкти, вагові коефіцієнти моделей, перетворення в нейронних мережах - усе це зручно подається у вигляді матриць і векторів [3]. Це означає, що матрична алгебра стала фундаментом не лише класичної інженерії, а й новітніх цифрових технологій.

Розглянемо просту ситуацію, коли потрібно описати переміщення об'єкта на площині. Якщо початкова точка має координати (x, y) , то після повороту на кут ϕ нові координати визначаються матричним добутком. Отже, одна компактна формула дозволяє миттєво обчислити нове положення будь-якої точки. Це дуже важливо у робототехніці, комп'ютерному зорі та навігаційних системах [3]. Подібний підхід використовується і в сучасних безпілотних системах, де потрібно швидко перерахувати координати об'єкта під час зміни його орієнтації у просторі. Наприклад, при русі БПЛА необхідно врахувати його поворот відносно осей, зміну напрямку польоту та положення бортових камер або сенсорів. Саме матричні методи дозволяють виконувати такі обчислення швидко, точно і в зручній для програмної реалізації формі [3]. Інший наочний приклад - матриця переходів у марковській моделі. Якщо стан системи описується вектором ймовірностей, то після множення на матрицю переходів можна отримати розподіл станів на наступному кроці. Так математична модель дозволяє не лише описати процес, а й спрогнозувати його майбутню поведінку. Такі підходи використовуються в задачах прогнозування, аналізу технічних станів систем і дослідження послідовностей подій [2].

Ще один простий приклад — комп'ютерна графіка. У 3D-модельованні об'єкти спочатку мають координати у просторі, а потім за допомогою матриць їх можна переміщати, повертати або відображати на екрані. Саме тому матриці активно використовуються у відеоіграх і графічних програмах. Крім того, вони дозволяють поєднувати кілька послідовних перетворень в один зручний математичний запис, що значно спрощує програмну реалізацію складних сцен.

Висновки

Отже, матриці є універсальним математичним інструментом, що поєднує теорію та практику. Вони забезпечують компактний запис даних, спрощують обчислення та дають змогу будувати моделі складних процесів. Їх застосування охоплює як класичні задачі алгебри, так і сучасні напрями - комп'ютерну графіку, економіку, криптографію, статистику, теорію ймовірностей та штучний інтелект.

Саме матричні методи широко використовуються у програмуванні, технічних розрахунках та модельованні реальних систем. Зокрема, вони мають важливе значення в системах керування та навігації безпілотних літальних апаратів, де за допомогою матриць описуються координатні перетворення, орієнтація об'єкта у просторі та обробка даних із датчиків. Тому вивчення матриць має не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення. Матриці залишаються одним із тих розділів вищої математики, які найбільш переконливо демонструють зв'язок між фундаментальними знаннями та сучасними інженерними застосуваннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г. П. Вища математика: підручник/ Г. П. Бевз - К: Вища школа, 2018. - 400 с.
2. Strang G. Linear Algebra and Its Applications. 5th ed. Boston: Cengage Learning / G. Strang 2016. - 520 p.
3. Anton H., Rorres C. Elementary Linear Algebra. 11th ed. Hoboken: Wiley/ H. Anton, C. Rorres, 2014. - 768 p.

Антонов Кирил Денисович - студент групи ЗКН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95 e-mail: antonov1kirill@gmail.com.

Огородник Сергій Анатолійович - студент групи ЗКН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95, e-mail: serhiyogorodnuk@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** - д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Kyryl D. Antonov - student of group 3 KN-25b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: antonov1kirill@gmail.com.

Serhii A. Ohorodnyk - student of group 3 KN-25b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: serhiyogorodnuk@gmail.com

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com