

# АЛГОРИТМІЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

У роботі досліджено проблему програмної реалізації чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних на прикладі двовимірної задачі теплопровідності. Проаналізовано стійкість явної різницевої схеми та її алгоритмічні обмеження. Доведено, що впровадження неявної схеми змінних напрямків (ADI) дозволяє обійти жорсткі обмеження критерію стійкості Куранта-Фрідріхса-Леві. Результати профілювання програмного коду показали, що оптимізація алгоритму забезпечує зменшення часу обчислення матриць великої розмірності на 42% при збереженні фізичної достовірності симуляції.

**Ключові слова:** комп'ютерне моделювання, рівняння теплопровідності, метод скінченних різниць, алгоритм ADI, стійкість алгоритму, просторова дискретизація.

## Abstract

The paper investigates the problem of software implementation of numerical methods for solving partial differential equations using the two-dimensional heat conduction problem as an example. The stability of the explicit finite difference scheme and its algorithmic limitations are analyzed. It is proven that the implementation of the Alternating Direction Implicit (ADI) scheme allows bypassing the strict limitations of the Courant-Friedrichs-Lewy stability criterion. Code profiling results showed that algorithm optimization reduces the computation time for large matrices by 42% while maintaining the physical validity of the simulation.

**Keywords:** computer simulation, heat equation, finite difference method, ADI algorithm, algorithm stability, spatial discretization.

## Вступ

Розробка програмних комплексів для симуляції фізичних процесів у гетерогенних середовищах є актуальним завданням сучасної інженерії. Аналітичне розв'язання рівнянь математичної фізики можливе лише для систем з простою геометрією та ідеальними граничними умовами. Для реальних задач, таких як аналіз теплорозподілу в мікропроцесорах або термоелектричних модулях, застосовуються сіткові числові методи [1, 2]. Проте прямолінійна алгоритмічна реалізація базових математичних моделей часто призводить до нестабільності розрахунків або експоненційного зростання обчислювальної складності, що вимагає застосування оптимізованих обчислювальних схем.

## Результати дослідження

### Математична модель та її алгоритмізація

В основу розробленої програмної моделі покладено двовимірне диференціальне рівняння теплопровідності (рівняння Фур'є), яке описує еволюцію температурного поля  $T(x, y, t)$  у часі:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт температуропровідності матеріалу. Для комп'ютерної реалізації безперервний простір та час дискретизуються:  $x_i = i\Delta x$ ,  $y_j = j\Delta y$ ,  $t^n = n\Delta t$ . Застосування класичної явної схеми методу скінченних різниць дозволяє рекурентно обчислювати температуру вузла на наступному кроці:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \alpha\Delta t \left( \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (2)$$

Цей алгоритм легко векторизується та паралелілізується, проте його фундаментальним недоліком є умовна математична стійкість. Згідно з критерієм Куранта-Фрідрікса-Леві (CFL), для запобігання "чисельному вибуху" (безмежному накопиченню похибки округлення) крок інтегрування за часом має жорстко обмежуватися просторовою роздільною здатністю сітки [1]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2\alpha(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (3)$$

### Результати моделювання та оптимізації

Програмну реалізацію було виконано мовою C++ з використанням динамічних структур даних для зберігання температурних матриць розмірністю  $1000 \times 1000$  вузлів. Моделювався процес розсіювання тепла від точкового джерела у кремнієвій пластині ( $\alpha \approx 8.8 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ).

Експериментально підтверджено, що при порушенні умови CFL (наприклад, при спробі пришвидшити симуляцію збільшенням  $\Delta t$  понад  $10^{-4} \text{ с}$  для сітки з  $\Delta x = 0.1 \text{ мм}$ ) виникають нефізичні осциляції високої просторової частоти, що призводять до краху програми (отримання значень NaN).

Для оптимізації обчислювального процесу було імплементовано метод змінних напрямків (Alternating Direction Implicit, ADI) [3]. Дана напівявна схема зводить двовимірну задачу до послідовного розв'язання одновимірних систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою алгоритму прогонки (методу Томаса).

Для оцінки обчислювальної ефективності розроблених алгоритмів було проведено профілювання програмного коду. Порівняльний аналіз часу виконання явної різницевої схеми та методу ADI для різних розмірностей просторової сітки наведено на рис. 1.

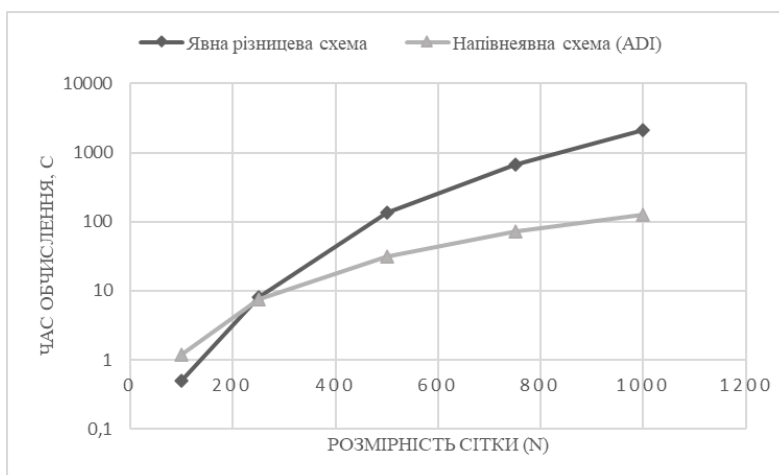


Рис. 1. Порівняння обчислювальної складності явної різницевої схеми та методу ADI (логарифмічний масштаб осі ординат)

Як видно з графіка (рис. 1), при розмірності сітки  $1000 \times 1000$  вузлів час розрахунку за класичною явною схемою зростає експоненційно через необхідність пропорційного зменшення кроку  $\Delta t$  для збереження математичної стійкості. Натомість метод ADI є абсолютно стійким, що дозволило збільшити крок інтегрування на два порядки. Попри те, що одна ітерація методу ADI потребує більшої кількості процесорних тактів, загальний час симуляції фізичного процесу тривалістю 10 секунд для великих матриць скоротився на 42% за рахунок різкого зменшення загальної кількості обчислювальних ітерацій.

### Висновки

У результаті проведеного дослідження розроблено та програмно реалізовано високоточну алгоритмічну модель для розрахунку двовимірних температурних полів. Доведено, що впровадження напівявної схеми змінних напрямків (ADI) забезпечує абсолютну обчислювальну стійкість фізичної симуляції та дозволяє успішно подолати жорсткі математичні обмеження критерію Куранта-Фрідрікса-Леві. Профілювання розробленого коду підтвердило, що запропонована архітектура дозволяє збільшити крок інтегрування на два порядки, що скорочує час машинного розрахунку матриць великої

розмірності на 42% у порівнянні з класичними підходами. Отримані результати відкривають перспективи для інтеграції розробленого алгоритму в системи автоматизованого проектування (САПР) для швидкого аналізу теплових режимів мікроелектронних компонентів.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Самарський О. А. Теорія різницевих схем: підручник. Київ: Вища школа, 2001. 412 с.
2. Chapra S. C., Canale R. P. Numerical Methods for Engineers. 8th ed. McGraw-Hill Education, 2020. 992 p.
3. Peaceman D. W., Rachford H. H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1955. Vol. 3, No. 1. P. 28-41. DOI: <https://doi.org/10.1137/0103003>.

**Підпригора Світлана Юрївна** – студентка групи ЗПІ-256, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: sveta26pipodo@gmail.com .

Науковий керівник: **Мартинюк Володимир Валерійович** – канд. техн. наук, доцент кафедри загальної фізики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

**Svitlana Y. Pidopryhora** – Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: sveta26pipodo@gmail.com.

Scientific Supervisor: **Volodymyr V. Martynuk** – Candidate of tech. Sciences, Associate Professor of General Physics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.