

# ПАРАДОКСИ НЕСКІНЧЕННОСТІ: ЯК ІНТЕГРАЛИ ОПИСУЮТЬ НЕМОЖЛИВЕ

Вінницький національний технічний університет

## **Анотація**

У роботі досліджено явища, пов'язані з парадоксальними властивостями нескінченних процесів у математичному аналізі. Розглянуто приклади, які демонструють інтуїтивний парадокс між скінченними та нескінченними величинами. Особливу увагу приділено геометричній інтерпретації інтеграла та аналізу поведінки функції на нескінченності. Показано, як за допомогою невласних інтегралів можна описувати об'єкти, що мають суперечливі властивості.

**Ключові слова:** невласний інтеграл, збіжність невласного інтеграла, нескінченність, геометрична інтерпретація, математичний аналіз

## **Abstract**

The paper investigates phenomena related to paradoxical properties of infinite processes in mathematical analysis. Examples illustrating the intuitive paradox between finite and infinite quantities are considered. Special attention is paid to the geometric interpretation of the integral and the behavior of functions at infinity. It is shown how improper integrals can describe objects with contradictory properties.

**Keywords:** improper integral, convergence of improper integrals, infinity, geometric interpretation, mathematical analysis

## **Вступ**

У математичному аналізі поняття нескінченності відіграє важливу роль, проте воно часто суперечить звичним інтуїтивним уявленням. Одним із найбільш цікавих аспектів є інтуїтивний парадокс, коли математичні об'єкти мають властивості, які здаються неможливими з точки зору повсякденного досвіду.

Інтеграли, зокрема невласні, дозволяють строго описувати такі ситуації [1]. Вони дають можливість досліджувати поведінку функції на нескінченності та встановлювати, чи є відповідні величини скінченними або нескінченними.

Нескінченність у математиці розглядається не як конкретне число, а як абстрактне поняття, що характеризує необмежене зростання величин або безмежність процесів [2]. Однак для людської інтуїції нескінченність часто виглядає суперечливою. У повсякденному житті ми звикли до скінченних об'єктів і процесів, тому результати, пов'язані з нескінченністю, можуть здаватися нелогічними. Наприклад, можливість отримання скінченного результату внаслідок нескінченного процесу або існування об'єктів із одночасно скінченними та нескінченними характеристиками створює відчуття парадоксу.

Актуальність даної теми полягає в тому, що поняття нескінченності та інтегрального числення широко застосовуються у різних галузях науки і техніки [3]. Зокрема, у фізиці інтеграли використовуються для опису руху, енергії та хвильових процесів, в інженерії - для розрахунку конструкцій і систем, а в інформаційних технологіях - для моделювання складних процесів та аналізу даних. Розуміння цих понять є необхідним для формування сучасного наукового світогляду та професійної підготовки фахівців технічних спеціальностей.

Мета доповіді: показати, як інтеграли допомагають описувати «парадоксальні» явища

## **Результати дослідження**

### **1. Класичні парадокси нескінченності.**

Визначений інтеграл традиційно інтерпретується як площа під графіком функції. У випадку невласних інтегралів ця інтерпретація поширюється на нескінченні проміжки або функції з розривами.

Таким чином, геометрична інтерпретація інтеграла дозволяє розглядати площі, які можуть бути як скінченними, так і нескінченними залежно від властивостей функції. Це створює основу для розуміння багатьох явищ, пов'язаних із нескінченністю, та дозволяє перейти від абстрактних понять до наочного геометричного змісту.

Для кращого розуміння природи нескінченності доцільно розглянути класичні приклади, які демонструють суперечність між інтуїцією та математичною строгістю.

**Парадокс Зенона.** Одним із найдавніших прикладів є парадокс Зенона [4], який ґрунтується на ідеї нескінченного поділу. Згідно з ним, будь-який відрізок можна ділити на все менші частини нескінченну кількість разів. Основна ідея полягає в тому, що для досягнення певної точки потрібно спочатку пройти половину шляху, потім половину від залишку, і так далі без кінця. Це створює враження, що рух ніколи не завершиться. Проте з точки зору математичного аналізу така послідовність відстаней утворює нескінченну суму, яка може бути скінченною:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Таким чином, виникає інтуїтивний парадокс: нескінченна кількість доданків може мати скінченну суму.

**Парадокс площі та об'єму.** Іншим важливим прикладом є парадокс, пов'язаний із геометричними фігурами, які мають незвичні властивості. У математичному аналізі існують об'єкти, для яких площа або об'єм можуть поводитися неочікувано. Наприклад, деякі фігури можуть мати скінченний об'єм, але нескінченну площу поверхні. Такі ситуації створюють інтуїтивні суперечності, оскільки у звичайному житті ми очікуємо, що ці величини будуть взаємопов'язаними. Саме тут інтеграли відіграють ключову роль, дозволяючи точно визначити, чи є відповідні величини скінченними чи ні, навіть у випадках, коли інтуїція дає хибні уявлення [5].

### Парадокс «рога Габрієля».

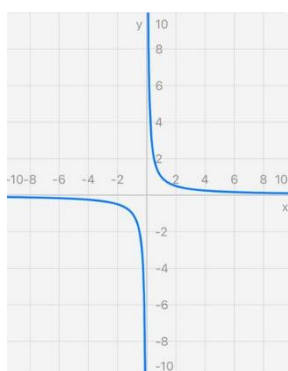


Рис. 1

Розглянемо функцію  $y = \frac{1}{x}$  (рис. 1) на проміжку  $(1; +\infty)$ .

Якщо обертати графік цієї функції навколо осі  $Ox$ , утворюється тіло, відоме як «ріг Габрієля» [3].

Інтеграл  $V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ , який характеризує об'єм даного тіла є збіжним, тобто має скінченне значення. Це означає, що об'єм фігури є обмеженим.

Площа поверхні:

Інтеграл  $S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ , який характеризує площу поверхні даного тіла

є розбіжним, тобто площа поверхні є нескінченною. Саме тут виникає інтуїтивний парадокс: тіло має скінченний об'єм, але нескінченну площу поверхні.

## **2. Поведінка функції на нескінченності.**

Ключову роль у виникненні подібних парадоксів відіграє поведінка функції на нескінченності [6]. Розглянемо інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Відомо, що:

- при  $p > 1$  - має місце збіжність невласного інтеграла;
- при  $p \leq 1$  - інтеграл розбігається.

Цей результат демонструє, наскільки незначна зміна показника степеня може впливати на характер інтеграла.

## **3. Значення парадоксів у навчанні**

Розгляд парадоксів нескінченності має важливе значення у процесі підготовки студентів технічних спеціальностей. Такі приклади дозволяють не лише засвоїти математичні методи, а й глибше зрозуміти їх зміст.

Зокрема:

- це сприяє більш ґрунтовному розумінню змісту інтеграла та його властивостей, зокрема у випадках, пов'язаних із нескінченними процесами;
- аналіз подібних ситуацій допомагає усвідомити різницю між інтуїтивними уявленнями та строгими математичними результатами, що є важливим елементом формування наукового мислення;
- такі задачі розвивають аналітичне мислення, навички логічного аналізу та вміння працювати з абстрактними математичними поняттями.

Для інженерів розуміння таких явищ є надзвичайно важливим, оскільки багато реальних процесів описуються саме за допомогою нескінченних моделей. Неправильне трактування цих понять може призвести до помилок у розрахунках і проектуванні систем.

Отже, нескінченність у математиці не є «помилкою» або абстрактною умовністю, а виступає важливим інструментом для опису складних процесів.

Інтеграл дозволяє строго формалізувати та досліджувати парадоксальні ситуації, які виникають при розгляді нескінченних величин.

## Висновки

У ході дослідження було встановлено, що інтеграл є потужним інструментом для опису явищ, пов'язаних із нескінченністю. Використання невластивих інтегралів дозволяє формалізувати та пояснити інтуїтивні парадокси, які виникають у математичному аналізі.

Показано, що геометрична інтерпретація інтеграла може призводити до неочікуваних результатів, зокрема до існування об'єктів зі скінченним об'ємом та нескінченною площею поверхні.

Нескінченність у математиці не є «помилкою», а виступає важливим інструментом для дослідження складних процесів і явищ. Інтеграл, зокрема невластиві, дозволяють строго описувати парадокси та надавати їм чітке математичне обґрунтування.

Таким чином, математичний аналіз допомагає узгодити інтуїтивні уявлення з об'єктивною реальністю, забезпечуючи глибше розуміння досліджуваних процесів.

Отже, дослідження поведінки функції на нескінченності та аналіз збіжності невластивого інтеграла є важливими складовими сучасного математичного аналізу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Прохоренко М.В., Прохоренко С.В., Ярема Н.П. та ін. Вища математика: функції декількох змінних, кратні та криволінійні інтегралі. – Львів: Львівська політехніка, 2019. – 100 с.
2. Thomas G. Calculus. – Pearson Education, 2018. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/calculus/P200000003480>
3. Apostol T. Mathematical Analysis. – Addison-Wesley, 1974. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.scribd.com/document/541714923/Tom-M-Apostol-Mathematical-Analysis-Second-Edition-Addison-Wesley-1974>
4. Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С. та ін. Вища математика: підручник. – Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 480 с.
5. Барабаш О.В., Власик Г.М., Дахно Н.Б. та ін. Вища математика. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних. – Київ: ДУТ, 2019. – 232 с.
6. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. – Cengage Learning, 2020. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://share.google/PZu1fXcUEE96qTqdr>

**Анастасія Ігорівна Тасьмук** – студентка групи 4КН-256, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [anastasiatasmuk@gmail.com](mailto:anastasiatasmuk@gmail.com)

Науковий керівник: **Майя Борисівна Ковальчук** - д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)

**Anastasia I. Tasmuk** – student of group 4KN-25b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95e-mail: [anastasiatasmuk@gmail.com](mailto:anastasiatasmuk@gmail.com)

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)