УДК 517.5

Я. О. Хміль
М. Б. Ковальчук

РОЗШИРЕННЯ ФАКТОРІАЛА: ГАММА- ТА БЕТА-ФУНКЦІЇ ЕЙЛЕРА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ІНТЕГРАЛЬНОМУ ЧИСЛЕННІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглядається математичний апарат розширення поняття факторіала на множину дійсних чисел за допомогою Гамма- та Бета-функцій Ейлера. Проаналізовано їхні основні аналітичні властивості, рекурентні співвідношення та взаємозв'язок. Продемонстровано ефективність застосування цих спеціальних функцій як потужного інструменту для обчислення складних визначених та невласних інтегралів, які важко або неможливо розв'язати класичними методами інтегрування.

Ключові слова: факторіал, Гамма-функція, Бета-функція, невласний інтеграл, визначений інтеграл, інтегрування частинами.

Abstract

The paper considers the mathematical apparatus for extending the factorial concept to the set of real numbers using Euler's Gamma and Beta functions. Their main analytical properties, recurrence relations, and interconnections are analyzed. The effectiveness of using these special functions as a powerful tool for calculating complex definite and improper integrals, which are difficult or impossible to solve by classical integration methods, is demonstrated.

Keywords: factorial, Gamma function, Beta function, improper integral, definite integral, integration by parts.

Вступ

Класичне визначення факторіала $n!$ має зміст виключно для множини цілих невід'ємних чисел і є базовим елементом комбінаторики та алгебри. Проте з розвитком математичного аналізу, теорії ймвірностей та алгоритмічного моделювання виникла нагальна потреба в обчисленні факторіалів для дробових та від'ємних значень. Фундаментальним викликом для математиків XVIII століття став пошук неперервної аналітичної функції, яка б інтерполювала значення дискретного ряду факторіалів. Вирішенням цієї проблеми стали спеціальні інтеграли, розроблені Леонардом Ейлером, - Гамма- та Бета-функції. Метою даної роботи є дослідження математичного апарату функцій Ейлера та демонстрація їхньої прикладної ефективності при обчисленні складних класів визначених інтегралів.

Результати дослідження

<u>Історія виникнення Гамма- та Бета-функцій.</u> Проблема аналітичного продовження факторіала на множину дійсних чисел постала перед науковою спільнотою у 1720-х роках. Німецький математик Християн Гольдбах звернувся до Леонарда Ейлера з питанням про можливість знаходження неперервної кривої, яка б інтерполювала значення дискретного ряду факторіалів. У 1729 році Леонард Ейлер успішно розв'язав цю задачу, відкривши спеціальні невласні інтеграли, які згодом отримали назву інтегралів Ейлера першого та другого роду.

Сучасну математичну нотацію та позначення для Гамма-функції (Г) ввів французький математик Адрієн-Марі Лежандр у 1811 році. Згодом, у 1839 році, Жак Біне запропонував використовувати символ B для Бета-функції. Фундаментальні дослідження цих вчених не лише розв'язали проблему факторіала, але й заклали основу для розвитку цілого розділу математичного аналізу - теорії спеціальних функцій, яка сьогодні є невід'ємною частиною розв'язання складних інженерних та алгоритмічних задач.

<u>Аналітичні властивості, рекурентні співвідношення та взаємозв'язок факторіала і Гамма- та Бета-функцій Ейлера.</u> Основою аналітичного продовження факторіала є Гамма-функція $\Gamma(x)$, яка задається через параметричний невласний інтеграл [1, 2]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0 \qquad (1)$$

Застосовуючи класичний метод інтегрування частинами, де $u = t^{x-1}$ та $dv = e^{-t dt}$, можна вивести фундаментальну рекурентну властивість цієї функції:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (2)$$

Ця тотожність повністю відтворює властивість звичайного факторіала $(n! = n \cdot (n-1)!)$. Враховуючи, що інтеграл $\Gamma(1) = 1$, математичним індуктивним шляхом доводиться, що для будь-якого натурального числа n виконується рівність:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Таким чином, Гамма-функція є гладкою кривою, що проходить через усі точки дискретного факторіала, і дозволяє обчислювати значення для дійсних чисел (наприклад, класичним є значення $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$).

Другим елементом цього математичного апарату є Бета-функція $B(x, y)$ (інтеграл Ейлера першого роду). На відміну від Гамма-функції, вона задається визначеним інтегралом на скінченному відрізку $[0; 1]$:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0 \qquad (3)$$

Головна аналітична цінність Бета-функції полягає в її безпосередньому алгебраїчному зв'язку з Гамма-функцією через теорему Ейлера:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \, (4)$$

Ця теорема перетворює функції Ейлера на потужний інструмент обчислення інтегралів. Багато визначених інтегралів, що містять ірраціональності або високі степені поліномів, вимагають громіздких замін змінних та багатократного застосування формули Ньютона-Лейбніца. За допомогою ж Бета-функції такі задачі зводяться до простих арифметичних дій з дробами.

Розглянемо практичний приклад [3]. Необхідно знайти значення визначеного інтеграла:

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$$

Використання стандартної підстановки $t = \sqrt{1-x}$ призведе до появи многочленів вищих степенів і суттєво ускладнить процес. Натомість запишемо підінтегральний вираз у формі Бета-функції:

$$I = \int_0^1 x^{3-1} \, (1-x)^{\frac{3}{2}-1} dx$$

Звідси очевидно, що параметри $x = 3$, а $y = \frac{3}{2}$. Застосовуючи формулу зв'язку з Гамма-функцією, отримуємо:

$$I = B\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(3 + \frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}$$

Використовуючи рекурентну властивість Гамма-функції ($\Gamma(3) = 2, \Gamma(1.5) = 0.5\sqrt{\pi}$, $\Gamma(4.5 = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$), та підставивши ці значення у вихідний дріб, отримуємо точну відповідь:

$$I = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{105\sqrt{\pi}}{16}} = \frac{16}{105}$$

Як бачимо, застосування функцій Ейлера дозволило уникнути складного інтегрування, звівши задачу до елементарної арифметики.

Висновки

Дослідження Гамма- та Бета-функцій Ейлера показує, як перехід від дискретних понять до їх неперервних аналітичних узагальнень розширює межі математичного аналізу. Використання спеціальних функцій дозволяє значно оптимізувати обчислювальні процеси, перетворюючи розв'язання складних визначених та невласних інтегралів на прості алгебраїчні маніпуляції. Опанування цього математичного інструментарію є важливим кроком для розв'язання прикладних задач та розробки математичних моделей в інформаційних технологіях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібник. - Київ : А.С.К., 2006. - 648 с.
2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник. - Київ : Либідь, 1993. -320 с.
3. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика : підручник : у 3 кн. - Київ : Либідь, 1994.

Ярослав Олегович Хміль - студент групи 4 КН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: yaroslavhmel2008@gmail.com

Науковий керівник: ***Майя Борисівна Ковальчук*** - д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Yaroslav O. Khmil - student of group 4 KN-25b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: yaroslavhmel2008@gmail.com

Supervisor: ***Maya B. Kovalchuk*** - Doctor of Science (Ped.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com