

О.В. Гуменна

Н.Б. Дубова

Г. Г. Кашканова

## АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ МОВОЮ C++

Вінницький національний технічний університет

### Анотація

Метою даної роботи є дослідження методу найменших квадратів для побудови апроксимуючої прямої та його реалізація мовою програмування C++. Програма дозволяє вводити координати експериментальних точок та обчислювати коефіцієнти рівняння апроксимуючої прямої  $y=ax+b$ , що найкраще наближає задані дані, а також визначати середньоквадратичну похибку апроксимації. Робота демонструє застосування математичних методів обробки даних у програмуванні.

**Ключові слова:** метод найменших квадратів, апроксимація, лінійна регресія, математичне моделювання.

### Abstract

The purpose of this work is to study the method of least squares for constructing a line of best fit and its implementation in the C++ programming language. The program allows you to enter the coordinates of points, calculate the coefficients  $a$  and  $b$  of the line  $y=ax+b$  that best fits the data, and also determine the mean square error of approximation. The work demonstrates the application of mathematical methods of data processing in programming.

**Keywords:** least squares method, approximation, linear regression, mathematical modeling.

### Вступ

У багатьох наукових і технічних задачах виникає необхідність визначити функціональну залежність між величинами на основі експериментальних даних. Оскільки вимірювання часто містять похибки, отримані точки не завжди лежать на одній точній функції. Для розв'язання цієї проблеми використовують методи апроксимації. Одним із найбільш поширених методів є метод найменших квадратів, який дозволяє знайти таку функцію, що найкраще наближує задані дані. Суть методу полягає у мінімізації суми квадратів відхилень між реальними значеннями та значеннями, отриманими за допомогою апроксимуючої функції. У даній роботі розглядається лінійна апроксимація функції та її реалізація мовою програмування C++. Метод найменших квадратів широко застосовується у статистиці, економіці, інженерії, фізиці та комп'ютерному моделюванні для аналізу експериментальних даних та побудови математичних моделей.

У багатьох наукових і технічних задачах виникає потреба відтворити залежність між величинами на основі експериментальних даних. Мета цієї роботи — **знайти найкращу лінійну апроксимацію експериментальних точок методом найменших квадратів та оцінити точність отриманої моделі.**

### Результати досліджень

Для реалізації методу найменших квадратів було створено програму мовою C++, яка дозволяє користувачу вводити координати точок на площині та знаходити рівняння прямої, що найкраще наближує ці точки.

Програма починає роботу з введення кількості точок та їх координат. Для зберігання значень використовуються контейнери **vector**, які дозволяють зручно працювати з динамічними масивами.

Після введення даних програма обчислює необхідні статистичні суми:

- суму значень  $x$
- суму значень  $y$
- суму добутків  $xy$

- суму квадратів  $x^2$

На основі цих значень визначаються коефіцієнти лінійної функції виду

$$y = ax + b$$

де

$a$  — кутовий коефіцієнт прямої,

$b$  — вільний член.

Коефіцієнти обчислюються за формулами методу найменших квадратів:

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y - a \sum x}{n}$$

### Приклад застосування методу

Для демонстрації роботи методу найменших квадратів розглянемо приклад. Нехай у результаті експериментального дослідження отримано набір пар значень  $(x_i, y_i)$ , що характеризують залежність між двома величинами.

Необхідно знайти лінійну функцію виду

$$y = ax + b,$$

яка найкраще наближує експериментальні дані.

Відповідно до методу найменших квадратів необхідно мінімізувати суму квадратів відхилень між експериментальними значеннями  $y_i$  та значеннями функції:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Для цього обчислюються такі величини:

- сума значень  $x$ ;
- сума значень  $y$ ;
- сума добутків  $xy$ ;
- сума квадратів  $x^2$ .

Після знаходження цих сум розв'язується система рівнянь методу найменших квадратів, у результаті чого визначаються коефіцієнти  $a$  і  $b$  апроксимуючої прямої.

Після обчислення параметрів програма виводить рівняння апроксимуючої прямої. Крім того, для оцінювання точності моделі обчислюється середньоквадратична похибка. Для цього визначається різниця між реальними значеннями  $y$  та значеннями, які отримані за допомогою знайденої функції. Квадрати цих відхилень сумуються, після чого обчислюється середнє значення та квадратний корінь. Таким чином отримується показник, який характеризує точність побудованої моделі.

#### Повний код програми

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <windows.h>
using namespace std;
int main() {
    system("chcp 65001");
    int n;
    cout << "Введіть кількість точок: ";
    cin >> n;
    vector<double> x(n), y(n);
    cout << "Введіть значення x та y:\n";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> x[i] >> y[i];
    }
    double sumX = 0, sumY = 0, sumXY = 0, sumX2 = 0;
```

```

for (int i = 0; i < n; i++) {
sumX += x[i];
sumY += y[i];
sumXY += x[i] * y[i];
    sumX2 += x[i] * x[i];
}
double a = (n * sumXY - sumX * sumY) /
    (n * sumX2 - sumX * sumX);
double b = (sumY - a * sumX) / n;
cout<< "\nРівняння апроксимуючої прямої:\n";
cout<< "y = " << a << "x + " << b <<endl;
doubleerror = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
doubley_calc = a * x[i] + b;
error += pow(y[i] - y_calc, 2);
}
error = sqrt(error / n);
cout<< "Середньоквадратична похибка: " <<error<<endl;
return 0;
}

```

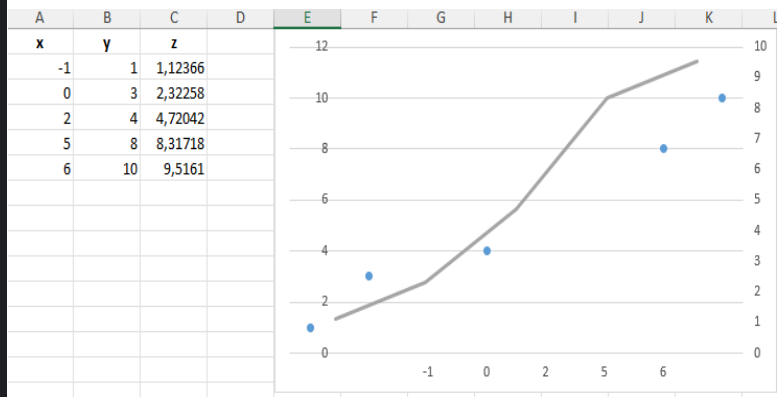
### Приклад роботи програми

```

Введіть кількість точок:5
5
Введіть значення x та y:
-1 1
-1 1
0 3
0 3
2 4
2 4
5 8
5 8
6 10
6 10

Рівняння апроксимуючої прямої:
y = 1.19892x + 2.32258
Середньоквадратична похибка: 0.515356

```



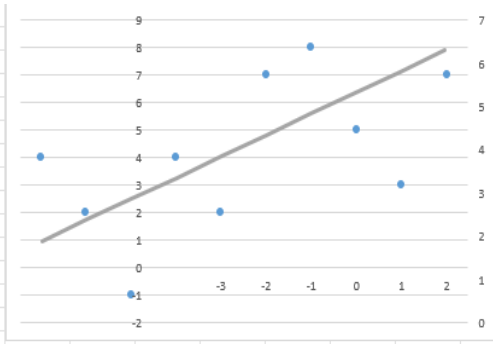
Отримане рівняння прямої  $y = 1.1989x + 2.32258$  добре описує зростаючу залежність між змінними, а середньоквадратична похибка 0.515 свідчить про відносно невелике відхилення від експериментальних даних.

```

Введіть кількість точок:10
10
Введіть значення x та y:
-3 4
-3 4
-2 2
-2 2
-1 -1
-1 -1
0 4
0 4
1 2
1 2
2 7
2 7
3 8
3 8
4 5
4 5
5 3
5 3
6 7
6 7

```

x	y	z
-3	4	1,890913
-2	2	2,381822
-1	-1	2,872731
0	4	3,36364
1	2	3,854549
2	7	4,345458
3	8	4,836367
4	5	5,327276
5	3	5,818185
6	7	6,309094



```

Рівняння апроксимуючої прямої:
y = 0.490909x + 3.36364
Середньоквадратична похибка: 2.21401

```

Значення середньоквадратичної похибки 2.214 свідчить, що точки розташовані більш розсіяно відносно прямої, тому точність апроксимації нижча.

**Висновок**

У ході виконання даної роботи було досліджено метод найменших квадратів та реалізовано програму для апроксимації функцій мовою програмування C++. Розроблена програма дозволяє знаходити рівняння прямої за набором експериментальних точок та оцінювати точність отриманої моделі за допомогою середньоквадратичної похибки. Робота дозволила закріпити знання з математичного моделювання, чисельних методів та програмування, а також продемонструвала практичне застосування методу найменших квадратів для обробки експериментальних даних.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Задачин В. М. **Чисельні методи**. – Київ : Вища школа, 2003. – 328 с.
2. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б. **Чисельні методи**. – Львів : Світ, 2005. – 408 с.
3. Навчальні матеріали “Чисельні методи в інженерії” / КНТУ. – Київ : КНТУ, 2018. – 250 с.
4. Задачин В. М. **Чисельні методи: навчальний посібник**. – Харків : ХНУ, 2012. – 312 с.

**Гуменна Ольга Віталіївна** – студентка групи ІЕХКБ – 256, факультет інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: olgahymenna2510@gmail.com

**Дубова Надія Борисівна** – старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail:dubova\_n\_b@vntu.edu.ua

**Кашканова Галина Григорівна** – доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail:g.kashkanova@vntu.edu.ua

**Humenna Olha Vitaliivna** – student of group ІЕХКБ – 25b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: olgahymenna2510@gmail.com

**Dubova Nadiya Borysivna** – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: dubova\_n\_b@vntu.edu.ua

**KashkanovaHalynaHryhorivna** – Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, KhmelnytskeShosse, 95, e-mail: g.kashkanova@vntu.edu.ua