УДК 519.6

**В. О. Галяновська**
**Р. Р. Краєвська**
**Ю. В. Добранюк**

# ОПТИМІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРІЇ МОНОЛІТНОГО ФУНДАМЕНТУ БУДІВЛІ МЕТОДОМ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПЛОЩІ БУДІВЛІ

Вінницький національний технічний університет;

***Анотація***
*У цій науковій роботі розглянуто задачу оптимального вибору геометричних параметрів прямокутного монолітного фундаменту з метою забезпечення максимально корисної площі при мінімальних витратах на матеріали, що залежать від периметра. Запропоновано математичну модель, засновану на методах екстремумів функцій двох змінних. Наведено приклад розрахунку для заданої площі фундаменту. Розглянуто можливість застосування моделі в проєктуванні плит перекриття, майданчиків та огороджень.*
**Ключові слова:** оптимізація, фундамент, площа, периметр, екстремум, геометрія, витрати.

***Abstract***
*This scientific work considers the problem of optimal selection of geometric parameters of a rectangular monolithic foundation in order to ensure maximum usable area with minimum material costs depending on the perimeter. A mathematical model based on the methods of extrema of functions of two variables is proposed. An example of calculation for a given foundation area is given. The possibility of using the model in the design of floor slabs, platforms and fences is considered.*
**Keywords**: optimization, foundation, area, perimeter, extremum, geometry, costs.

## Вступ

У сучасному будівництві фундамент є одним з ключових конструктивних елементів, що забезпечує надійність, просторову жорсткість та довговічність будівлі. Ефективність фундаментних систем значною мірою залежить від їх геометричних характеристик, які визначають як технічні показники, так й економічну доцільність застосування тих чи інших конструктивних рішень. Зокрема, при проєктуванні монолітних фундаментів прямокутної форми важливим завданням досягнення раціонального співвідношення між їх площею та периметром.

Витрати на зведення фундаменту залежать не лише від загального об’єму бетону, але й від периметрично орієнтованих елементів: опалубки, крайового армування, тепло- та гідроізоляційних матеріалів, деформаційних швів тощо. Для конструкції однакової площі зміна співвідношення сторін призводить до суттєвих коливань периметра, а отже, і вартості. Це створює необхідність у використанні математичних методів оптимізації [1, 2, 3], що дозволяють мінімізувати периметр конструкції за умови сталої площі або ж, навпаки, максимізувати, корисну площу при заданому периметрі.

Така проблема належить до класичних задач математичної оптимізації, зокрема до задач знаходження екстремумів функцій двох змінних [4, 5, 6]. Прикладне значення у будівництві є високим. Оптимальні співвідношення сторін сприяють більш рівномірному розподілу навантажень і зменшенню нерівномірних осідань, що підвищує надійність фундаменту в цілому.

Подібні оптимізаційні моделі [5, 6, 7] можуть бути застосованими до плит перекриття, майданчиків, огороджувальних конструкцій та інших будівельних елементів, де співвідношення між площею та периметром відіграє роль у вартості та конструктивній ефективності. Розвиток таких методів сприяє удосконаленню проєктного підходу та забезпечує можливість формування економічно обґрунтованих та конструктивно оптимальних рішень.

## Математична модель

Нехай фундамент має площу ***S***, а його сторони ***x*** та ***y***. Необхідно знайти такі ***x*** та ***y***, щоб при фіксованій площі ***S*** периметр ***P*** був мінімальним.

Згідно з умовою можемо визначити площу ***S*** та периметр ***P***:

$$S = x \cdot y. \tag{1}$$

$$P = 2 \cdot (x + y). \tag{2}$$

Виразимо ***y*** з рівняння (1) та підставимо у вираз (2):

$$y = \frac{S}{x}. \tag{3}$$

$$P = 2 \cdot \left( x + \frac{S}{x} \right). \tag{4}$$

Графічне представлення залежності (4) показано на рис. 1 та 2.

Знайдемо похідну функції (4):

$$P'(x) = 2 \cdot \left( 1 - \frac{S}{x^2} \right). \tag{5}$$

Знайдемо критичні точки функції (4). Першою критичною точкою є точка $x_1 = 0,$ в якій вираз (5) не існує. Інші точки шукаємо, прирівнявши похідну (5) функції (4) до нуля:

$$2 \cdot \left( 1 - \frac{S}{x^2} \right) = 0. \quad 1 - \frac{S}{x^2} = 0. \quad \frac{S}{x^2} = 1. \quad x^2 = S. \quad |x| = \sqrt{S}. \quad x_2 = -\sqrt{S}. \quad x_3 = \sqrt{S}.$$

Точка $x = 0$ не належить області визначення функції, а з умови, що $x \geq 0,$ отримаємо:

$$x = \sqrt{S}. \tag{6}$$

У точці (6) похідна (5) функції (4) змінює свій знак з від'ємного на додатній, а це ознака локального мінімуму зі значенням функції:

$$P = 2 \cdot \left( \sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}} \right) = 4 \cdot \sqrt{S}. \tag{7}$$

А так як $y = \frac{S}{x} = \sqrt{S},$ то робимо висновок, що шукана оптимальна форма при фіксованій площі є квадратом.

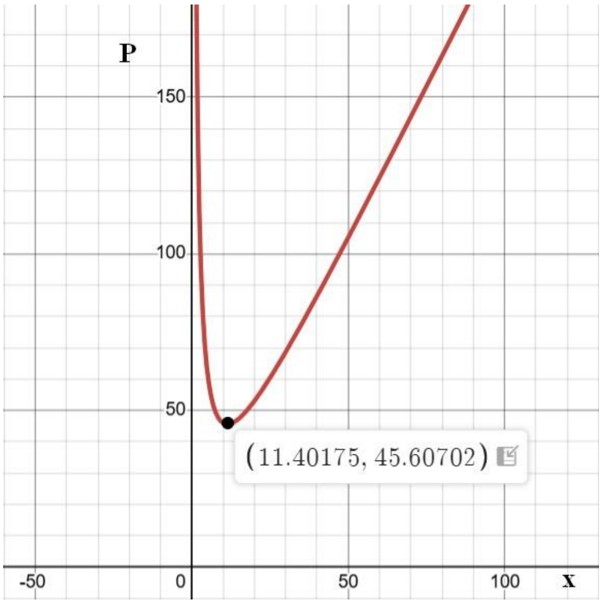


Рис. 1 – Геометричне представлення мінімального значення периметра фундаменту для площі 130 м²

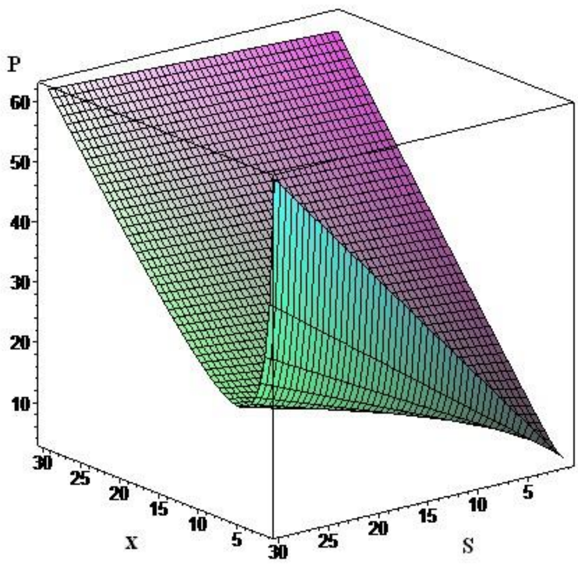


Рис. 2 – Геометричне представлення залежності між периметром, площею та розмірами фундаменту

### Задача

Нехай фундамент має площу **130 м$^2$**, а його сторони позначимо як $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$. Необхідно знайти такі $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$, щоб периметр $\boldsymbol{P}$ був мінімальним.

Розв'язання

Відповідно до нашої математичної моделі можемо одразу знайти шукані значення:

$$x = y = \sqrt{S} = \sqrt{130} = 11,4 \text{ м.}$$

Значення мінімального периметру становить:

$$P = 4 \cdot 11,4 = 45,6 \text{ м.}$$

Для даної задачі функція (4) буде мати вигляд:

$$P(x) = 2 \cdot \left( x + \frac{130}{x} \right).$$

На рис. 1 показано графічне представлення отриманого розв'язання даної задачі.

### Застосування в інших галузях

Оптимізація геометрії при фіксованій площі має широке застосування:

- Архітектура та урбаністика: оптимізація форми ділянок забудови для мінімізації довжини огорож та доріг.
- Ландшафтний дизайн: проектування майданчиків та клумб з мінімальними витратами на обрамлення.
- Пакування та логістика: упакувати товар фіксованої площі так, щоб мінімізувати витрати скотчу та плівки для фіксації.

### Висновок

Оптимізація форми фундаменту за критерієм мінімального периметра при фіксованій площі дозволяє зменшити витрати на матеріали, що розміщують по контуру конструкції – такі як гідроізоляція, опалубка та армування. Математична модель, заснована на елементарному аналізі функцій, демонструє, що квадратна форма є оптимальною серед прямокутних форм. Простота розрахунків робить метод доступним для практичного застосування в будівництві, а універсальність – корисним у суміжних галузях, де важлива ефективність використання площі при обмежених ресурсах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Добранюк Ю. В. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції двох змінних в прямокутній області D без використання пакета оптимізації СКМ Maple [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, Я. О. Усенко // Матеріали IV Міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. – 6 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc24/paper/viewFile/21372/17698.
2. Краєвський, В. О. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та елементи теорії поля: навчальний посібник / В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – 142 с.
3. Добранюк Ю. В. Застосування СКМ Maple для побудови 2D області в задачі обчислення площі фігури, обмеженої віссю ординат та кубічними функціями синуса та косинуса [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, А. Б. Кукленко, А. В Лихогляд // Матеріали IV Міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc24/paper/viewFile/21371/17697.
4. Клєопа І. А., Тютюнник О. І., Крупський Я. В., Добранюк Ю. В. Особливості використання сучасних інформаційнокомунікаційних технологій у вищій математичній освіті. Інформаційні технології та інноваційні методики навчання в закладах вищої освіти. 2024. Вип. 72. С. 113-124.
5. Добранюк Ю. В. Застосування СКМ Maple для побудови 2D області в задачі обчислення площі фігури, обмеженої параболою та лінією / Ю. В. Добранюк, А. В Лихогляд, А. Б. Кукленко, Я. О. Усенко // LIII Всеукраїнська науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії (2024) : Вінниця, ВНТУ, 20-22 березня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2024/paper/view/20849/17278.
6. Добранюк Ю. В. Похідна третього порядку та галузі її використання // [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, А. М. Коробочка, В. О. Галяновська // Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2025)», Вінниця, 15-16 червня 2025 р. – 4 с. – Електрон. текст. дані. – 2025. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2025/paper/viewFile/25416/20974

7. Dobraniuk Yurii Application SKM Maple to reduce the quadratic form of expression to the canonical form / Yurii Dobraniuk, Nadiya Blashchuk, Maksym Barbaliuk // V International Scientific and Practical Internet Conference "Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity", (Vinnytsia, May 1 - 2, 2025): book of abstracts [Electronic network scientific publication]. Vinnytsia, 2025, P. 46 - 48.

***Галяновська Вікторія Олегівна*** — студентка групи БМ-24б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: viktoriya.halyanovska@gmail.com.

***Краєвська Руслана Русланівна*** – студентка групи 1АМ-25Б, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: ruslana1859@gmail.com

***Добранюк Юрій Володимирович*** — кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

***Galyanovska Viktoria O.*** – student of group BM-24b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : viktoriya.halyanovska@gmail.com.

***Ruslana Kraievska*** – student of group 1AM-25B, Faculty of Construction, Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: ruslana1859@gmail.com

***Dobranyuk Yuriy V.*** – Ph.D., Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.