

## **ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СИМУЛЯЦІЇ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОГРАМУВАННІ**

Вінницький національний технічний університет

### **Анотація**

*У роботі досліджено застосування диференціальних рівнянь у симуляції фізичних процесів у програмуванні. Розглянуто математичні моделі руху фізичних об'єктів та їх чисельну реалізацію з використанням методів інтегрування. Показано, що зведення рівнянь руху до систем диференціальних рівнянь першого порядку дозволяє ефективно реалізувати фізичні симуляції в програмному забезпеченні. Результати моделювання представлено у вигляді графіків і фазових портретів, що забезпечує наочний аналіз динаміки системи. Зроблено висновок щодо важливості диференціальних рівнянь у розробці програмних симуляцій та ігрових рушіїв.*

**Ключові слова:** диференціальні рівняння; чисельні методи; фізичне моделювання; програмування; візуалізація.

### **Abstract**

*The paper investigates the application of differential levels in the simulation of physical processes in programming. Mathematical models of the motion of physical objects and their numerical implementation using integration methods are considered. It is shown that reducing the motion level to a system of differential levels in the first way allows for the effective implementation of physical simulations in software. The modeling results are presented in the figures of graphs and phase portraits, which provides a visual analysis of the dynamics system. A conclusion is drawn regarding the importance of differential levels in the development of software simulations and game engines.*

**Keywords:** differential equations; numerical methods; physical modeling; programming; visualization.

### **Вступ**

Фізичні процеси, що описують рух тіл, коливання та взаємодію об'єктів, відіграють важливу роль у сучасному програмуванні, зокрема в комп'ютерній графіці, ігрових рушіях та інженерних симуляціях. Математичним апаратом для опису таких процесів є диференціальні рівняння, які дозволяють формалізувати зміну стану системи з часом.

У більшості прикладних задач аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь є складними або взагалі відсутніми, що зумовлює використання чисельних методів інтегрування. Такі методи лежать в основі програмних алгоритмів, які застосовуються для симуляції фізичних процесів у реальному часі. Використання чисельних підходів дає змогу реалізувати моделі фізичних систем у вигляді дискретних алгоритмів, придатних для програмної обробки.

Сучасні засоби візуалізації відіграють ключову роль у дослідженні динаміки фізичних процесів, оскільки дозволяють наочно аналізувати результати чисельного моделювання. Поєднання математичних моделей, чисельних методів та програмної реалізації створює ефективний інструментарій для розробки фізичних симуляцій[1], що широко застосовується в ІТ-системах різного призначення.

Метою роботи є дослідження можливостей застосування диференціальних рівнянь та чисельного методу Ейлера для симуляції руху фізичних об'єктів у програмуванні.

## Результати дослідження

У межах даного дослідження розглянуто задачу симуляції руху матеріальної точки під дією зовнішніх сил, що є типовою для фізичних симуляцій у програмуванні. Такий підхід широко застосовується в ігрових рушіях та системах комп'ютерної графіки для моделювання поведінки об'єктів у віртуальному середовищі.

Рух матеріальної точки в одновимірному випадку описується другим законом Ньютона, який приводить до диференціального рівняння другого порядку:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, v), \quad (1)$$

$$F(x, v) = -kx - cv, \quad (2)$$

З метою зручності програмної реалізації рівняння руху зведено до системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -kx - cv. \end{cases} \quad (3)$$

Такий запис дозволяє реалізувати чисельне інтегрування стану системи в дискретні моменти часу та є стандартним підходом у фізичних симуляціях.

Оскільки аналітичний розв'язок задачі не завжди є придатним для використання в реальному часі, для чисельного моделювання було застосовано метод Ейлера[2]. Перехід від неперервного часу до дискретного виконується з використанням кроку інтегрування  $h$ , а різниці співвідношення мають вигляд:

$$x_{n+1} = x_n + hv_n, \quad (4)$$

$$v_{n+1} = v_n + h(-kx_n - cv_n). \quad (5)$$

Отримана чисельна схема дозволяє обчислювати положення та швидкість об'єкта на кожному часовому кроці, що є основою програмної реалізації симуляції.

Аналіз результатів чисельного моделювання показує, що координата матеріальної точки з часом поступово зменшується за амплітудою, що відповідає затухаючому коливальному процесу (рисунок 1). Фазовий портрет системи має вигляд спіралі, що сходиться до початку координат, що свідчить про асимптотичну стійкість рівноважного стану динамічної системи (рисунок 2).

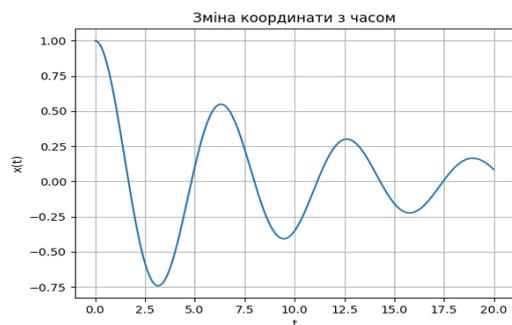


Рисунок 1 Зміна координати матеріальної точки

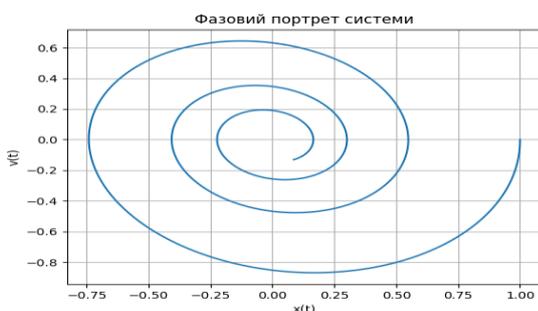


Рисунок 2 Фазовий портрет динамічної системи

## Висновки

У роботі показано, що диференціальні рівняння є ефективним інструментом для симуляції фізичних процесів у програмуванні. Використання чисельних методів дозволяє реалізувати математичні моделі у вигляді програмних алгоритмів та досліджувати динаміку систем у дискретному часі. Отримані результати підтверджують можливість застосування даного підходу в комп'ютерній графіці, ігрових рушіях та інших ІТ-застосуваннях. Запропонований підхід може бути використаний як базова модель для подальшого розширення фізичних симуляцій із застосуванням більш точних чисельних методів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Millington I. Integration Basics. Gaffer On Games [Електронний ресурс]. Режим доступу [https://gafferongames.com/post/integration\\_basics/](https://gafferongames.com/post/integration_basics/) (дата звернення: 03.01.2026). — Назва з екрана.
2. Погорілий С. Д., Савченко О. Я. Чисельні методи : навчальний посібник для студентів закладів вищої освіти. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 212 с.

**Гавриш Віталій Вікторович** – студент групи ЗПІ-24Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [vetalik.gavrysh@gmail.com](mailto:vetalik.gavrysh@gmail.com)

Науковий керівник: **Кыриляшчук Світлана Анатоліївна** – кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: [kyrylashchuk@vntu.edu.ua](mailto:kyrylashchuk@vntu.edu.ua)

**Gavrysh Vitaliy Viktorovich** – student of group ЗПІ-24В, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [vetalik.gavrysh@gmail.com](mailto:vetalik.gavrysh@gmail.com)

Scientific supervisor: **Kyrylashchuk Svitlana Anatoliivna** – Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: [kyrylashchuk@vntu.edu.ua](mailto:kyrylashchuk@vntu.edu.ua)