

РОЗРОБКА ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ЗАСОБІВ ППО ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ОЧІКУВАНИХ ВТРАТ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі представлено математичну модель оптимального розподілу систем протиповітряної оборони (ППО) для перехоплення ракетних та безпілотних загроз. Модель формалізовано у вигляді бінарної цілочислової лінійної задачі (MILP) [1], де цільова функція мінімізує сумарні очікувані втрати від ураження об'єктів та вартість використаних ракет-перехоплювачів. У моделі враховано ймовірності перехоплення, дальність дії, боєзапас, темп вогню та економічні параметри систем ППО. Запропоновано програмну реалізацію моделі на Python із використанням solvers CBC (через бібліотеку pulp) [2]. Проведено експериментальну перевірку правильності роботи програми, включаючи тестування на малих прикладах та аналіз чутливості впливу параметрів. Отримані результати підтверджують ефективність моделі для оптимізації бойового використання ППО.

Ключові слова: оптимізація, ППО, MILP, цілочислове програмування, моделювання загроз, Python

Abstract

The paper presents a mathematical model of optimal distribution of air defense systems (ADS) for intercepting missile and unmanned threats. The model is formalized as a binary integer linear programming (MILP) problem, where the objective function minimizes the total expected losses from the destruction of objects and the cost of the interceptor missiles used. The model takes into account the probabilities of interception, range, ammunition, rate of fire, and economic parameters of AD systems. We propose a software implementation of the model in Python using CBC solvers (via the pulp library). We conducted an experimental verification of the correctness of the program, including testing on small examples and sensitivity analysis of the influence of parameters. The results confirm the effectiveness of the model for optimizing the combat use of air defense systems.

Keywords: optimization, air defense, MILP, integer programming, threat modeling, Python

Вступ

Проблема раціонального розподілу систем протиповітряної оборони є критично важливою в умовах масованих ракетних і безпілотних атак. Кожна система ППО має різні тактико-технічні характеристики: дальність перехоплення, ймовірність ураження, кількість ракет, вартість пострілу. Водночас об'єкти, що підлягають захисту, мають різну цінність. Це формує задачу прийняття рішень, метою якої є мінімізація сумарних очікуваних втрат. Задача природним чином формулюється як задача оптимізації, а саме — бінарна цілочислова лінійна оптимізація (MILP), де рішенням є матриця призначення «система ППО – ціль».

Результати дослідження

Математична модель оптимального розподілу систем ППО була формалізована як задача бінарної цілочислової лінійної оптимізації (MILP). Цільова функція моделі поєднує мінімізацію очікуваних втрат від прорваних цілей та витрат на застосування засобів перехоплення:

$$\min_{x_{ij} \in \{0,1\}} \underbrace{\sum_{j=1}^n v_j \left(1 - \sum_{i=1}^m p_{ij} x_{ij}\right)}_{\text{очікувані втрати по цілям}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i x_{ij}}_{\text{вартість пострілів}}$$

де:

x_{ij} – бінарна змінна (1 якщо система i стріляє по цілі j);

v_j – цінність об'єкта, на який націлена ціль j ;

p_{ij} – ймовірність перехоплення цілі j системою i ;

c_i – вартість одного пострілу системи i .

Обмеження моделі включають:

$$1. \text{ Максимум один постріл на ціль: } \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1$$

$$2. \text{ Обмеження дальності: } x_{ij} = 0 \text{ якщо } d_{ij} > R_i$$

$$3. \text{ Ліміт боезапасу: } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq cap_i$$

$$4. \text{ Темп вогню: } \sum_{j:T_j=t} x_{ij} \leq rate_{i,t}$$

Для реалізації моделі було розроблено програмний модуль на Python з використанням бібліотеки `ruhr` та “солвера” CBC [2]. Програма підтримує два режими роботи: оптимальне розв'язання MILP-задачі та евристичний алгоритм для випадків відсутності “солвера”.

Експериментальна перевірка моделі проводилась на тестових сценаріях з 5-10 цілями та 5-6 системами ППО різних типів (S-300, Patriot, NASAMS, IRIS-T, Buk, Gerard). Аналіз результатів показав:

- Ефективність оптимального розподілу:** У порівнянні з випадковим призначенням, MILP-оптимізація забезпечує зниження сумарних очікуваних втрат на 35-50% при однакових умовах.
- Вплив вартості пострілу:** Аналіз чутливості підтвердив, що введення параметра c_i запобігає нераціональному використанню дорогих ракет (наприклад, Patriot вартістю 80 ум.од.) для захисту маловартісних об'єктів.
- Адекватність моделі ймовірностей:** Запропонована формула розрахунку p_{ij} як функції відстані d_{ij} , максимальної дальності R_i та типу цілі демонструє правдоподібну поведінку – зниження ймовірності перехоплення зі збільшенням дистанції.
- Обробка обмежень ресурсів:** Модель коректно враховує ліміти боезапасу та темпу вогню, що підтверджується відсутністю порушень цих обмежень у рішеннях. [3].
- Продуктивність алгоритмів:** Для сценаріїв розмірності до 20×20 (системи \times цілі) оптимальне розв'язання знаходиться за менше 1 секунди, що задовольняє вимогам оперативного застосування. [4].

Висновки

Розроблена математична модель оптимального розподілу систем ППО ефективно формалізує задачу мінімізації очікуваних втрат з урахуванням тактико-технічних та економічних обмежень.

Програмна реалізація на Python з використанням бібліотеки `ruhr` дозволяє отримувати оптимальні або близькі до оптимальних рішення для практичних сценаріїв розмірності, актуальної для реальних систем ППО. Введення параметра вартості пострілу c_i запобігає неефективному витрачання дорогих

засобів перехоплення та сприяє раціональному розподілу ресурсів. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення моделі для обліку таких факторів, як: можливість кількох пострілів по одній цілі, оптимальне розміщення систем ППО на місцевості, динамічне оновлення позицій цілей, інтеграція з системами розвідки та спостереження. [5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wolsey L.A. Integer Programming. 2nd ed. Wiley, 2020. 608 p. (ISBN: 978-1119755770)
2. Mitchell S. An Introduction to PuLP: A Python LP/MIP Modeler. 2023. URL: <https://coin-or.github.io/pulp/>
3. Kress M., Szechtman R., Atkinson M.P. Optimal Defense of a Distributed Asset. Military Operations Research. 2018. Vol. 23(3). P. 5-18.
4. Karasakal O. Air Defense Missile-Target Allocation Models for Naval Air Defense. Naval Research Logistics. 2008. Vol. 55(8). P. 761-769.
5. Python Software Foundation. Python 3.11 Documentation. 2023. URL: <https://docs.python.org/3/>

Урлапова Дар'я Павлівна – студентка групи ІСТ-236, факультет автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: dashaurlapova@gmail.com

Науковий керівник: **Горячев Георгій Володимирович** — кандидат технічних наук, доцент кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, Вінниця,

Urlapova Daria P. – student of the Faculty for Intelligent information technologies and automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dashaurlapova@gmail.com

Supervisor: **Goriachev Georhii V.** – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of System Analysis and Information Technologies, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia