

## ОЗНАКА Д'АЛАМБЕРА ЯК ІНСТРУМЕНТ В ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

### **Анотація**

*У даній роботі досліджується ознака Д'Аламбера як фундаментальний критерій, що використовується для аналізу збіжності числових рядів у математичному аналізі. Проаналізовано формальні умови застосування цього критерію, який ґрунтується на порівнянні відношення сусідніх членів ряду, та його здатність визначати абсолютну збіжність. Особлива увага приділена ефективності критерію для рядів, що містять факторіали та експоненційні вирази, де він забезпечує швидку і надійну оцінку. Також розглянуто обмеження ознаки у випадках, коли її граничне значення дорівнює одиниці, що вимагає переходу до інших, більш точних методів дослідження.*

**Ключові слова:** ознака Д'Аламбера, збіжність, розбіжність, числові ряди, відношення сусідніх членів, абсолютна збіжність, факторіали, математичний аналіз.

### **Abstract**

*This paper investigates D'Alembert's ratio test as a fundamental criterion used to analyze the convergence of numerical series in mathematical analysis. The formal conditions for applying this criterion, which is based on comparing the ratio of adjacent terms, and its ability to determine absolute convergence are analyzed. Special attention is paid to the criterion's effectiveness for series containing factorials and exponential expressions, where it provides a quick and reliable assessment. The study also examines the limitation of the test in cases where its limit value equals unity, necessitating the transition to other, more precise investigation methods.*

**Keywords:** D'Alembert's ratio test, convergence, divergence, numerical series, ratio of adjacent terms, absolute convergence, factorials, mathematical analysis.

### **ВСТУП**

Поняття збіжності числових рядів є наріжним каменем математичного аналізу, формуючи основу для багатьох галузей сучасної науки, від обчислювальної математики до теоретичної фізики. Без точного визначення збіжності неможливе коректне застосування таких потужних інструментів, як ряди Тейлора та Фур'є [1]. Саме тому розробка строгих критеріїв для дослідження збіжності є однією з фундаментальних задач, що стоять перед математичною спільнотою з часів становлення аналізу.

Одним із перших та найбільш ефективних критеріїв, що дозволяє швидко оцінити поведінку ряду, стала ознака Д'Аламбера (критерій відношення). Вона була запропонована французьким математиком Жаном Лероном Д'Аламбером у XVIII столітті та стала ключовим інструментом для роботи з рядами, члени яких містять факторіали та експоненційні вирази [2]. На відміну від ранніх, менш строгих методів, ознака Д'Аламбера надала математикам чіткий механізм для класифікації рядів на абсолютно збіжні та розбіжні.

Актуальність теми полягає в тому, що ознака Д'Аламбера залишається основним інструментом у навчальному процесі та прикладних дослідженнях, оскільки забезпечує оперативну та надійну оцінку збіжності [3]. Розуміння її переваг та обмежень є критично важливим для коректного вибору стратегії аналізу рядів.

Метою даного дослідження є комплексний аналіз та демонстрація застосування ознаки Д'Аламбера для дослідження збіжності числових рядів, включаючи розгляд її теоретичних основ, практичних прикладів та визначення меж застосування.

Об'єктом дослідження є процес встановлення збіжності числових рядів.

Предметом дослідження є теоретичні основи та математичний апарат ознаки Д'Аламбера та її взаємозв'язок з іншими критеріями збіжності.

## Результати дослідження

**1. Теоретична основа та принцип дії.** Ознака Д'Аламбера (критерій відношення) є класичним фундаментальним методом для визначення збіжності числових рядів [1]. Вона базується на глибокому теоретичному принципі порівняння поведінки ряду з поведінкою геометричної прогресії. Ідея полягає в тому, щоб з'ясувати, наскільки швидко зменшуються члени ряду, аналізуючи відношення наступного члена до попереднього. Такий підхід має важливе значення не лише в теоретичному аналізі, але й у чисельних методах програмування, де дослідження збіжності послідовностей і рядів лежить в основі алгоритмів наближених обчислень.

**2. Класифікаційні висновки за граничним значенням.** Аналіз цього відношення дозволяє зробити чіткі висновки щодо природи ряду. Якщо границя цього відношення менша за одиницю, ряд збігається абсолютно [2], оскільки, починаючи з певного моменту, кожен наступний член ряду зменшується зі швидкістю, яка гарантує збіжність. Якщо ж границя більша за одиницю, ряд розбігається, адже його члени зменшуються недостатньо швидко або взагалі не прямують до нуля. Критичним є випадок, коли границя дорівнює одиниці, або межа не існує; у цій ситуації ознака Д'Аламбера не дає визначеної відповіді. Це вимагає для подальшого аналізу застосування інших, більш чутливих методів, таких як ознака Коші, інтегральна ознака або критерій Раабе. Подібний підхід використовується і в програмуванні при аналізі збіжності ітераційних алгоритмів, де визначення поведінки послідовності наближень є критично важливим для коректності обчислень. Таким чином, ознака забезпечує швидку і надійну оцінку збіжності рядів у багатьох практичних випадках, слугуючи ефективним інструментом первинної діагностики.

**3. Виняткова ефективність для складних виразів.** Для демонстрації виняткової ефективності ознаки розглянемо ряд, загальний член якого містить факторіали та степені. При застосуванні критерію відношення до таких складних виразів відбувається ключове алгебраїчне спрощення. Зокрема, відношення факторіалів скорочується майже повністю, залишаючи лише лінійний множник, а відношення експонент зводиться до константи. У результаті, громіздкий вираз перетворюється на елементарне обчислення границі, яке в деяких випадках призводить до результату, що виражається через число  $e$ . Практичне значення цього полягає в тому, що ознака Д'Аламбера дозволяє ефективно аналізувати ряди зі складною структурою, де безпосереднє порівняння є утрудненим. Аналогічні ситуації виникають у програмній реалізації математичних функцій, де використання збіжних рядів забезпечує точність і стабільність алгоритмів обчислення. Метод широко використовується як у навчальному процесі, так і при дослідженні поведінки рядів у прикладних задачах математики, фізики та інформаційних технологій.

**4. Обмеження критерію та стратегії аналізу межових випадків.** У випадках, коли звичайна границя відношення прямує до одиниці, ми стикаємося з критичною межею, де швидкість прямування членів до нуля недостатньо чітко відрізняється від швидкості членів рядів, чия збіжність вирішується іншими критеріями [3]. У цій ситуації для подальшого дослідження застосовують ознаку Раабе або інші критерії вищого порядку, які аналізують наступні члени асимптотичного розкладу. Це дозволяє досліджувати «межові» випадки, для яких стандартна ознака є неінформативною. Подібні проблеми виникають і в програмуванні при аналізі ітераційних процесів, де неправильна оцінка збіжності може призвести до нестабільності або некоректної роботи алгоритму. Крім того, ознака Д'Аламбера є надзвичайно корисною для рядів із факторіалами, степенями та експонентами, де вона часто дає швидку відповідь завдяки згаданим властивостям скорочення.

Таким чином, ознака Д'Аламбера має значні переваги: вона є аналітично простою, демонструє виняткову ефективність для рядів зі складними членами (особливо з факторіалами та експонентами) та має широке застосування у теоретичних і прикладних дослідженнях, зокрема в чисельних методах і програмуванні. Попри обмеження у випадку граничного значення, що дорівнює одиниці, ознака Д'Аламбера залишається одним із найзручніших та універсальних методів для первинної діагностики збіжності, визначаючи подальшу стратегію аналізу як у математичному аналізі, так і в обчислювальних алгоритмах.

## Висновки

Концепція збіжності числових рядів є важливою частиною математичного аналізу, а ознака Д'Аламбера виступає ефективним інструментом для її оперативного встановлення. Проведене дослідження підтвердило, що цей критерій, заснований на аналізі границі відношення сусідніх членів, дозволяє чітко визначати абсолютну збіжність або розбіжність більшості числових рядів. Його застосування ґрунтується на порівнянні поведінки ряду зі збіжною геометричною прогресією, що забезпечує надійність отриманих висновків.

Ознака Д'Аламбера виявляє особливу ефективність при роботі з рядами, що містять факторіали, експоненти та степеневі вирази, оскільки у таких випадках відношення сусідніх членів значно спрощує обчислення границі. Водночас встановлено, що у межовому випадку, коли границя відношення дорівнює одиниці, критерій стає невизначеним, що потребує застосування інших методів аналізу, зокрема ознак Коші чи Раабе. Таким чином, ознака Д'Аламбера виконує роль діагностичного інструменту, який визначає подальшу стратегію дослідження збіжності рядів.

Важливе прикладне значення ознака Д'Аламбера має у сфері програмування та комп'ютерних наук. У чисельному програмуванні вона використовується для аналізу збіжності рядів, що лежать в основі алгоритмів обчислення математичних функцій у стандартних програмних бібліотеках. Аналіз збіжності дозволяє забезпечити коректність реалізації алгоритмів, стабільність ітераційних процесів та ефективність використання обчислювальних ресурсів. Отже, ознака Д'Аламбера є не лише фундаментальним критерієм математичного аналізу, а й важливим інструментом для обґрунтування надійності програмних рішень у галузі інформаційних технологій.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ознака Д'Аламбера. [Електронний ресурс] – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%B0\\_%D0%B4%27%D0%90%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D1%80%D0%B0](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%B0_%D0%B4%27%D0%90%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%B1%D0%B5%D1%80%D0%B0)
2. Ознака Д'Аламбера збіжності ряду (приклад) / YukhymCommunity [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://yukhym.com/uk/ryadi-ta-jikh-zbizhnist/oznaka-dalamberta-zbizhnosti-ryadu-prikladi.html>
3. Ознака Д'Аламбера. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/7458350/page:5/>

**Євгеній Сергійович Кулісіді** – студент групи 1 КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [yevhenii28368@gmail.com](mailto:yevhenii28368@gmail.com)

Науковий керівник: **Майя Борисівна Ковальчук** – д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)

**Yevhenii S. Kulisidi** – student of group 1CS-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [yevhenii28368@gmail.com](mailto:yevhenii28368@gmail.com)

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [maya.kovalchuk@gmail.com](mailto:maya.kovalchuk@gmail.com)