

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У даній роботі досліджується фундаментальний принцип теорії ймовірностей – Закон Великих Чисел (ЗВЧ). Розкривається його сутність через класичні формулювання Бернуллі та Чебишева. Основна увага приділена практичній імплементації закону в ключових галузях: від страхування та фінансових ризиків до клінічних досліджень та соціологічних опитувань. Робота містить критичний аналіз поширених міфів (наприклад, «помилки гравця») та чітко окреслює умови коректного застосування ЗВЧ. Окремо розглядається синергія між Законом Великих Чисел та Центральною Граничною Теоремою як основа сучасної статистичної інференції. Підкреслюється значення ЗВЧ для формування data-driven мислення та критичного сприйняття інформації.

Ключові слова: Закон Великих Чисел, ймовірність, математичне сподівання, вибірка, стабільність частоти, статистичне прогнозування, теорема Бернуллі, теорема Чебишева.

Abstract

This work explores a fundamental principle of probability theory – the Law of Large Numbers (LLN). Its essence is revealed through the classical formulations of Bernoulli and Chebyshev. The primary focus is on the practical implementation of the law in key fields: from insurance and financial risk management to clinical trials and sociological surveys. The work contains a critical analysis of common myths (e.g., the "gambler's fallacy") and clearly outlines the conditions for the correct application of the LLN. The synergy between the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem as the foundation of modern statistical inference is considered separately. The significance of the LLN for the formation of data-driven thinking and a critical perception of information is emphasized.

Keywords: Law of Large Numbers, probability, mathematical expectation, sample, stability of frequency, statistical forecasting, Bernoulli's theorem, Chebyshev's theorem.

Вступ

Людство завжди намагалося знайти закономірності серед випадковості. Чи можна передбачити, скільки пацієнтів одужає після певної операції? Чи вигідно страховій компанії укладати мільйони договорів? Відповіді на ці питання дає не інтуїція, а суворая математична логіка, яку втілює Закон Великих Чисел (ЗВЧ). Цей закон не передбачає результат окремого випадкового експерименту, але з надзвичайною точністю описує поведінку масових однорідних явищ. Він є тим мостом, що поєднує абстрактну теорію ймовірностей з прикладними науками – економікою, соціологією, медициною та контролем якості, обґрунтовуючи саму можливість отримання об'єктивних знань з обмежених даних [1, 2].

Результати дослідження

Існують різні форми ЗВЧ, що посилюють одне одного [2, 3].

Теорема Якоба Бернуллі (1713): Закон стабілізації частоти

Це найперша та найбільш інтуїтивно зрозуміла форма. Вона стверджує, що зі збільшенням кількості n незалежних повторень експерименту, відносна частота m/n появи події A збігається за ймовірністю до її теоретичної ймовірності p .

Формальний запис для будь-якого $\varepsilon > 0$: $P(|m/n - p| < \varepsilon) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Наведемо простий приклад: ймовірність народження хлопчика ≈ 0.512 . У одній родині може бути 3 доньки, але серед 10 000 новонароджених у країні частка хлопчиків буде надзвичайно близькою до 51.2%. Закон пояснює, чому частота стає надійнішою мірою ймовірності, ніж окремі результати [3].

Теорема Пафнутія Чебишева (1867): Закон стабілізації середнього. Ця більш загальна та потужна форма працює з середніми арифметичними випадкових величин. Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – незалежні однаково розподілені величини з математичним сподіванням $\mu = E[X]$ та обмеженою дисперсією $\sigma^2 = D[X]$. Тоді вибіркове середнє $\bar{X}_n = (1/n)\sum X_i$ збігається за ймовірністю до μ [4].

Формальний запис:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Ця теорема обґрунтовує метод багаторазових вимірювань для підвищення точності. Середнє значення тисячі вимірів довжини деталі буде набагато ближчим до істинного розміру, ніж один окремих вимір, навіть з похибкою приладу [2].

ЗВЧ не просто абстракція – це інженерний інструмент управління невизначеністю [2, 5].

1. Страхування та фінанси. Страхова компанія не знає, чи потрапить саме ваша машина в ДТП цього року. Але, знаючи ймовірність аварії p для великої групи однорідних клієнтів (n), вона може точно прогнозувати загальну кількість страхових випадків ($\approx n \cdot p$). Це дозволяє розрахувати справедливую премію, що покриває витрати і забезпечує прибуток. Аналогічно, інвестиційні фонди використовують диверсифікацію (велику кількість активів), щоб середня доходність портфеля наближалася до очікуваної, зменшуючи вплив провалу окремої акції [1, 6].

2. Науки про здоров'я. Ефективність нового лікування не можна довести окремими успішними чи невдалими випадками. Рандомізовані контрольовані дослідження базуються на ЗВЧ: середній результат у великій групі пацієнтів, які отримують ліки, порівнюється із середнім результатом у контрольній групі. Це дозволяє відокремити дію препарату від випадкових ремісій або плацебо-ефекту [2, 7].

3. Соціальні та маркетингові дослідження. Неможливо опитати всіх виборців перед виборами. Однак, правильно сформована випадкова вибірка в кілька тисяч осіб забезпечує, що середня думка в цій вибірці (наприклад, відсоток тих, хто підтримує кандидата) з високою ймовірністю буде близькою до середньої думки в генеральній сукупності (усі виборці). Це прямий наслідок теореми Чебишева та методичних принципів Держстату [4, 8].

4. Управління якістю та логістика. Контроль кожної виробленої деталі на конвеєрі дорогий і непрактичний. Натомість перевіряють випадкову вибірку. Якщо в ній відсоток браку не перевищує допустимий рівень (розрахований на основі ймовірнісних моделей, що включають ЗВЧ), всю партію приймають. Аналогічно, середній час доставки посилки, розрахований на тисячах відправлень, стає надійним орієнтиром для планування логістичних процесів [4, 5].

Найнебезпечніший міф – це "прагнення середнього до компенсації". Якщо монета випала "орлом" 10 разів поспіль, багато хто вважає, що наступного разу з більшою ймовірністю має випасти "решка". Це хиба. Монета "не пам'ятає" минулі кидки. ЗВЧ гарантує лише те, що в далекій перспективі (наприклад, після 10 000 кидків) частка орлів наблизиться до 0.5, але не обіцяє ніякої негайної "компенсації" після серії [3].

Ключові умови застосування. ЗВЧ працює лише за таких умов [1, 4]:

1. Незалежність: Спостереження не повинні впливати одне на одне.
2. Однакова розподіленість (для сильної форми): Величини мають однакові ймовірнісні характеристики.
3. Обмеженість дисперсії: Розкид значень не має бути нескінченно великим (що виключає, наприклад, деякі "важкохвості" фінансові розподіли).
4. Велике n : "Велике" – поняття відносне. Для стабілізації частоти народження хлопчика достатньо $n = 10\,000$. Для прогнозування рідкісних подій (ймовірність 0.001) може знадобитися $n = 100\,000$.

ЗВЧ і ЦГТ – дві сторони однієї медалі [2, 5]. ЗВЧ відповідає на питання "Куди?" (Середнє прямує до математичного сподівання). ЦГТ відповідає на питання "Як?" (Розподіл цього середнього є асимптотично нормальним з дисперсією σ^2/n). ЦГТ дозволяє кількісно оцінити точність наближення, побудувавши довірчий інтервал. Разом вони утворюють основу для статистичного висновку, що детально розглядається в сучасних навчальних посібниках [4, 7].

Висновки

Закон Великих Чисел – це не просто розділ математики, а карта навігації в світі невизначеності. Він обґрунтовує саму можливість наукового пізнання через вибірккові методи, робить економіку ризику керованою, а соціальну політику – обґрунтованою. Розуміння ЗВЧ є обов'язковим елементом

функціональної грамотності сучасної людини, що дозволяє критично оцінювати статистичні заяви в ЗМІ, розпізнавати маркетингові маніпуляції та особисто протистояти ірраціональним забобонам, таким як "помилка гравця". В епоху Big Data цей класичний закон набуває нової актуальності, залишаючись математичним гарантом того, що закономірності, виявлені в великих даних, мають об'єктивну силу [1, 5, 8].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Голомозий В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник для студ. вищ. навч. закл. / В. В. Голомозий, М. В. Калініченко, Л. В. Царьова та ін. ; за ред. В. В. Голомозія. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 415 с
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1 / В. Феллер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 528 с
3. Козловська І. М. Основи теорії ймовірностей : навч. посіб. / І. М. Козловська. – Київ : Центр навчальної літератури, 2020. – 280 с
4. Казимир В. Я. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / В. Я. Казимир, Я. В. Стоцький. – Тернопіль : ТНТУ, 2019. – 312 с
5. Войчак Ю. М. Статистичні методи аналізу даних : навч. посіб. / Ю. М. Войчак, Т. П. Войчак, Н. В. Демченко. – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2018. – 292 с
6. Базилевич В. Д. Страхова справа : підручник / за ред. В. Д. Базилевича. – Київ : Знання, 2011. – 1019 с
7. Реброва О. Г. Основи клінічних досліджень : навч. посіб. / О. Г. Реброва, І. Б. Власенко, Ю. М. Сиренко та ін. ; за ред. О. Г. Ребрової. – Київ : Медицина, 2018. – 216 с
8. Державна служба статистики України. Методологічні положення щодо організації вибіркового обстеження домогосподарств [Електронний ресурс]. – Київ, 2022. – Режим доступу: <https://ukrstat.gov.ua> (дата звернення: 01.01.2026).

Шпак Віктор Сергійович, Вінницький національний технічний університет, Факультет електроенергетики та електромеханіки, 1-й курс, група ЕС-25б, shpakviktor2912@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент. Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Shpak Viktor S., Vinnytsia National Technical University, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, 1st year, group ES-25b, shpakviktor2912@gmail.com

Sachaniuk-Kavets'ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets'ka Natalia V.** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com