

РОЛЬ ВИЗНАЧНИКА ЯКОБІАНА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У тезі розглянуто поняття визначника якобіана та його роль у математичному аналізі. Подано означення якобіана як визначника матриці, складеної з частинних похідних першого порядку, та розкрито його значення при заміні змінних у кратних інтегралах. Особливу увагу приділено геометричному та фізичному змісту якобіана, зокрема його впливу на зміну елементарних площ і об'ємів при переході між системами координат. Показано, що використання якобіана забезпечує коректність обчислень і є необхідною умовою аналізу багатовимірних перетворень.

Ключові слова: якобіан, визначник Якобі, частинні похідні, заміна змінних, кратні інтеграли, математичний аналіз.

Abstract

The thesis considers the concept of the Jacobian determinant and its role in mathematical analysis. The definition of the Jacobian as the determinant of a matrix composed of partial derivatives of the first order is given, and its meaning is revealed when changing variables in multiple integrals. Special attention is paid to the geometric and physical content of the Jacobian, in particular its influence on the change of elementary areas and volumes when switching between coordinate systems. It is shown that the use of the Jacobian ensures the correctness of calculations and is a necessary condition for the analysis of multidimensional transformations.

Keywords: Jacobian, Jacobian determinant, partial derivatives, change of variables, multiple integrals, mathematical analysis.

Вступ

Якобіан визначається як визначник матриці Якобі, елементами якої є частинні похідні першого порядку функцій від кількох змінних [1]. Нехай задано систему функцій:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_n = u_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Тоді якобіан відповідної заміни змінних визначається як: [1, 5]

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Поява поняття якобіана пов'язана з необхідністю дослідження відображень між багатовимірними просторами змінних та аналізу їх властивостей. При розгляді функцій багатьох змінних виникає потреба у переході від однієї системи змінних до іншої, що потребує коректного математичного опису такого переходу [3]. Якобіан у цьому випадку дозволяє формалізувати зв'язок між старими та новими змінними на локальному рівні.

У математичному аналізі якобіан відіграє ключову роль при виконанні заміни змінних у кратних інтегралах, оскільки саме він враховує зміну елементарних областей інтегрування [1, 6]. Без урахування якобіана обчислення інтегралів у багатовимірному просторі є некоректними, оскільки не відображають

реальної геометричної зміни області. Таким чином, введення якобіана є необхідною умовою правильного аналізу багатовимірних перетворень.

Результат дослідження

Якобіан у розгорнутому вигляді задається у вигляді визначника квадратної матриці, елементами якої є частинні похідні $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ [5]. Значення цього визначника залежить від властивостей відображення між просторами змінних та дозволяє дослідити поведінку перетворення в околі заданої точки. Якщо значення якобіана відмінне від нуля, то відповідне відображення є локально оборотним [1]. Одним із основних застосувань якобіана є заміна змінних у кратних інтегралах. При такій заміні між диференціалами виконується співвідношення

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

де J — якобіан відповідного перетворення [1, 6]. Це співвідношення показує, що модуль якобіана виступає масштабним множником, який коригує значення інтеграла з урахуванням зміни об'єму елементарної області.

Геометричний зміст якобіана полягає в описі зміни елементарних площ і об'ємів при переході від однієї системи координат до іншої [3, 4]. Модуль якобіана характеризує, наскільки область простору розтягується або стискається в результаті перетворення. Якщо модуль якобіана більший за одиницю, елементарна область збільшується, якщо менший — зменшується. У випадку, коли якобіан дорівнює нулю, елементарний об'єм вироджується, що свідчить про втрату оборотності перетворення [1].

Якобіан широко застосовується також у класичній механіці, зокрема при переході до узагальнених координат та при аналізі фазового простору [2, 6]. У таких задачах правильний облік зміни координат має принципове значення для подальших математичних перетворень і фізичної інтерпретації результатів. Використання якобіана дозволяє коректно описувати еволюцію системи та пов'язані з нею зміни елементів об'єму в просторі змінних.

Крім того, якобіан використовується при дослідженні складних відображень у багатовимірному аналізі, де він слугує інструментом для оцінки властивостей таких відображень та їх локальної поведінки [5, 7]. Це робить якобіан універсальним засобом аналізу у широкому колі задач математичного аналізу.

Висновок

У ході дослідження встановлено, що якобіан є необхідним елементом при переході між системами змінних і при виконанні заміни змінних у кратних інтегралах [1, 5].

Показано, що модуль якобіана має чіткий геометричний зміст і характеризує зміну елементарних площ і об'ємів у багатовимірному просторі [3, 4]. Це дозволяє правильно інтерпретувати результати обчислень та забезпечує коректність математичних моделей.

Таким чином, якобіан використовується для аналізу властивостей багатовимірних відображень, дослідження їх оборотності та коректного виконання інтегральних перетворень. Отримані результати дозволяють зробити висновок про фундаментальне значення якобіана у задачах математичного аналізу та суміжних прикладних дисциплінах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Якобіан [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Якобіан>
2. Fowler М. Якобіан для еволюції часу // Вступ до теореми Ліувілля [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [https://ukrayinska.libretexts.org/фізики/Класична_механіка/Випускник_класичної_механіки_\(Fowler\)/11:_Вступ_до_теореми_Ліувілля/11.05:_Якобіан_для_еволюції_часу](https://ukrayinska.libretexts.org/фізики/Класична_механіка/Випускник_класичної_механіки_(Fowler)/11:_Вступ_до_теореми_Ліувілля/11.05:_Якобіан_для_еволюції_часу)
3. Якобіан — це [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://yak.koshachek.com/articles/jakobian-ce.html>

4. Якобіан [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://vue.gov.ua/Якобіан>
5. Визначник Якобіана [Електронний ресурс] : лекційний матеріал з математичного аналізу. — Режим доступу: <https://www.lectures.7mile.net/lec-matanaliz/5-2-10-viznachnik-yakobian.htm>
6. Fowler М. Якобійці // Вступ до теореми Ліувілля [Електронний ресурс]. — Режим доступу: [https://ukrayinska.libretexts.org/фізики/Класична_механіка/Випускник_класичної_механіки_\(Fowler\)/11:_Вступ_до_теореми_Ліувілля/11.06:_Якобійці_101](https://ukrayinska.libretexts.org/фізики/Класична_механіка/Випускник_класичної_механіки_(Fowler)/11:_Вступ_до_теореми_Ліувілля/11.06:_Якобійці_101)
7. Лекція з математичного аналізу. Якобіан [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://web.kpi.kharkov.ua/apm/wp-content/uploads/sites/82/2020/11/Lektsiya_3.11.20.pdf

Герасимчук Олена Вікторівна – студентка групи ІПО-24б, факультет інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: olena.milky1@gmail.com

Herasymchuk Olena Viktorivna – student of group IPO-24b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: olena.milky1@gmail.com