

ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА ЯК ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ ІНСТРУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено сутність формул Ейлера та їх роль у вивченні комплексних чисел. Показано взаємозв'язок між тригонометричною та показниковою формами подання, а також розглянуто, як ці формули спрощують виконання основних математичних дій. Проаналізовано геометричне подання комплексних чисел і застосування формул Ейлера для опису гармонічних коливань у фізиці та технічних науках.

Ключові слова: формули Ейлера, комплексні числа, показникова форма, тригонометрична форма, модуль, аргумент, гармонічні коливання.

Abstract

The paper explores the essence of Euler's formulas and their role in the study of complex numbers. The relationship between the trigonometric and exponential forms of representation is shown, and how these formulas simplify the performance of basic mathematical operations is considered. The geometric representation of complex numbers and the application of Euler's formulas to describe harmonic oscillations in physics and engineering are analyzed.

Keywords: Euler's formulas, complex numbers, exponential form, trigonometric form, modulus, argument, harmonic oscillations.

Вступ

Комплексні числа посідають важливе місце у вищій математиці та мають широке застосування в науці й техніці. Вони допомагають розв'язувати рівняння, які не мають дійсних коренів, і використовуються для опису коливань, електричних кіл змінного струму та багатьох фізичних процесів. Одним із найважливіших інструментів роботи з комплексними числами є формули Ейлера, що встановлюють зв'язок між їх показниковою та тригонометричною формами. Використання цих формул дозволяє значно спростити обчислення, пов'язані з діями над комплексними числами, зокрема піднесенням до степеня чи множенням. Метою цієї роботи є розгляд формул Ейлера, пояснення їх сутності та демонстрація прикладів практичного застосування у математичних задачах.

Результати дослідження

Леонард Ейлер (1707–1783) - видатний швейцарський математик XVIII століття, який зробив фундаментальний внесок у розвиток математичного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь та комплексного аналізу.

У першій половині XVIII століття Ейлер активно досліджував степеневі ряди та їх застосування до елементарних і тригонометричних функцій. Вивчаючи розклад експоненціальної функції та тригонометричних функцій у ряди Тейлора, він помітив глибокий зв'язок між ними. Саме цей зв'язок привів до відкриття формул, які сьогодні відомі як формули Ейлера.

У 1748 році в праці «*Introductio in analysin infinitorum*» Ейлер уперше систематично обґрунтував ці співвідношення, що стало початком формування комплексного аналізу як окремого розділу математики.

Формули Ейлера є фундаментальними результатами теорії комплексних чисел і встановлюють зв'язок між показниковою та тригонометричними функціями: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ [1]. Вони забезпечують компактний аналітичний запис комплексних чисел і їх геометричне представлення на комплексній площині.

На основі формули Ейлера довільне ненульове комплексне число може бути подане у показниковій формі: $z = re^{i\varphi}$, де модуль r визначає відстань від початку координат, а аргумент φ - напрям радіус-

вектора. Таке подання значно спрощує алгебраїчні операції, оскільки множення, ділення та піднесення до степеня зводяться до операцій над модулями та аргументами.

З практичної точки зору формули Ейлера мають істотне значення у фізиці гармонічних коливань та електротехніці, де використання комплексних експонент дозволяє подати осциляційні процеси у формі зручною для аналітичної обробки. Перехід від диференціальних рівнянь до алгебраїчних співвідношень у комплексній формі спрощує аналіз амплітудно-фазових характеристик систем і дозволяє компактно описувати фазові зсуви між величинами [2]. Це забезпечує ефективний інструментарій для дослідження усталених режимів, резонансних явищ і частотних властивостей лінійних систем.

Застосування формул Ейлера характеризується низкою суттєвих переваг. Передусім вони забезпечують компактний аналітичний запис комплексних чисел і дозволяють ефективно виконувати алгебраїчні операції, зводячи їх до дій над модулями та аргументами [3]. Такий підхід підвищує наочність математичного аналізу та зменшує обчислювальну складність при дослідженні складних виразів і перетворень у комплексній площині.

Водночас використання показникової форми комплексних чисел має певні обмеження. Основною проблемою є багатозначність аргументу комплексного числа, яка потребує чіткого фіксування області визначення та узгодженого вибору гілки аргументу. Нехтування цими аспектами може призводити до некоректних аналітичних перетворень і помилкових теоретичних висновків, зокрема при дослідженні степеневих і логарифмічних функцій комплексної змінної.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням застосування формул Ейлера в чисельних методах аналізу, цифровій обробці сигналів та комп'ютерному моделюванні динамічних систем. Комплексні експоненти широко використовуються під час спектрального аналізу сигналів, зокрема в алгоритмах перетворення Фур'є, а також при дослідженні частотних і фазових характеристик лінійних систем [4]. Вагоме значення мають застосування формул Ейлера в електротехніці та радіофізиці для опису хвильових процесів і фазових зсувів. У сучасних фізичних теоріях, зокрема квантовій механіці, вони відіграють ключову роль у моделюванні коливальних і хвильових явищ, що підтверджує їх високу теоретичну та прикладну цінність.

Висновки

Результати дослідження підтвердили, що формули Ейлера є важливим інструментом у роботі з комплексними числами, оскільки поєднують тригонометричну та показникову форми їх подання. Вони значно спрощують виконання математичних дій, таких як множення, ділення, піднесення до степеня та добування коренів. Формули Ейлера мають не лише теоретичне, а й практичне значення - їх широко використовують у фізиці, техніці та інших науках для опису коливальних і періодичних процесів. Отже, ці формули є важливою складовою вищої математики та мають велике прикладне значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Euler Formula and Euler Identity. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.intmath.com/complex-numbers/euler-formula-identity.php>
2. Спектральний аналіз сигналів. Перехід за допомогою формули Ейлера до комплексної форми ряду Фур'є для аналізу сигналів. – Режим доступу до ресурсу: https://files.fti.dp.ua/wp-content/uploads/tainacan-items/2456/8960/konspekt-lektsii-spektralnyi-analiz-fft_rp.pdf
3. Основні відомості про комплексні числа. – Режим доступу до ресурсу: <https://web.kpi.kharkov.ua/apm/wp-content/uploads/sites/82/2024/03/Lektsiya-05.pdf>
4. Euler's Formula: A Complete Guide. – Режим доступу до ресурсу: https://mathvault.ca/euler-formula/?utm_source=chatgpt.com

Анастасія Миколаївна Сінчук - студентка групи ІКН-246, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: nsttsnk2@gmail.com

Науковий керівник: **Майя Борисівна Ковальчук** - д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Anastasia M. Sinchuk - student of group 1 KN-24b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: nsttsnk2@gmail.com

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com