

РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФІВ: ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація.

У роботі розглянуто теоретичні засади та методи розв'язання задачі розфарбування графів. Визначено поняття хроматичного числа як основного кількісного показника задачі. Проаналізовано два типи алгоритмів: точний метод пошуку з поверненням, що гарантує оптимальність розв'язку, та наближений жадібний алгоритм, орієнтований на швидке отримання результату. На прикладі задачі складання розкладів продемонстровано практичну значущість досліджуваних методів для оптимізації процесів.

Ключові слова: розфарбування графа, хроматичне число, алгоритм пошуку з поверненням, жадібний алгоритм, складання розкладів.

Abstract.

The paper considers the theoretical foundations and methods for solving the graph coloring problem. The concept of the chromatic number is defined as the main quantitative indicator of the problem. Two types of algorithms are analyzed: an exact backtracking method, which guarantees the optimality of the solution, and an approximate greedy algorithm, aimed at obtaining a fast result. Using the example of the timetabling problem, the practical significance of the studied methods for process optimization is demonstrated.

Keywords: graph coloring, chromatic number, backtracking algorithm, greedy algorithm, timetabling.

Вступ

Задача розфарбування графа є важливою та має багато практичних застосувань. Вона походить із задачі розфарбування мапи, де потрібно використати мінімальну кількість кольорів так, щоб сусідні країни не мали однакового кольору. Саму задачу переведено в математичну площину заміною країн на вершини графів, а кордони між ними на зв'язки між цими вершинами [1].

Результати дослідження

Розфарбуванням графа $G = (V, E)$ називається присвоєння міток (кольорів) кожній вершині графа таким чином, щоб жодні дві суміжні вершини не мали однакового кольору. Мінімальна кількість кольорів k , необхідна для правильного розфарбування графа G , називається хроматичним числом і позначається $\chi(G)$ [2].

Для знаходження точного значення $\chi(G)$ часто використовують алгоритм пошуку з поверненням. Його суть полягає в наступному:

1. Вибирається незафарбована вершина.
2. Для неї пробуються всі кольори від 1 до k (де k — поточна верхня межа).
3. Якщо колір не суперечить розфарбуванню суміжних вершин, він фіксується, і алгоритм переходить до наступної вершини.
4. Якщо для вершини неможливо підібрати колір, алгоритм повертається до попередньої вершини і змінює її колір.

Цей метод гарантує знаходження оптимального розв'язку, проте його виконання займає велику кількість часу.

Через довгий час виконання цієї задачі існують наближені методи. Найпростішим є жадібний алгоритм. Його логіка полягає в наступному:

1. Вершини графа впорядковуються у певну послідовність .
2. Кожній черговій вершині присвоюється мінімально можливий номер кольору (наприклад, 1, 2, 3, ...), який ще не був використаний для фарбування суміжних із нею вершин [3].

Найбільш відомим прикладом застосування розфарбування графів є задача складання розкладів в яких вершини графа – це навчальні дисципліни, ребра – проводяться між тими дисциплінами, які відвідують одні й ті самі студенти, кольори – години розкладу.

Правильне розфарбування такого графа дозволяє скласти розклад так, щоб жоден студент не мав двох іспитів одночасно, використовуючи при цьому мінімальну кількість часових інтервалів.

Висновок

Отже, задача розфарбування графів є фундаментальною задачею теорії графів, яка має як теоретичне, так і практичне значення. У роботі було розглянуто основне означення задачі, поняття хроматичного числа та підходи до його знаходження. Точні методи, зокрема алгоритм пошуку з поверненням, дозволяють отримати оптимальний розв'язок, проте потребують значних обчислювальних ресурсів. Тому на практиці часто застосовуються наближені алгоритми, такі як жадібний, які забезпечують швидке отримання допустимого розфарбування. На прикладі задачі складання розкладів показано, що розфарбування графів ефективно використовується для розв'язання реальних прикладних задач, дозволяючи оптимально розподіляти ресурси та уникати конфліктів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Voloshin V. I. Graph Coloring: History, results and open problems // *Alabama Journal of Mathematics*. 2009. С. 1–3.
2. West D. *Introduction to Graph Theory* / D. West. Prentice Hall, 2001. 588 с.
3. Дослідження та програмна реалізація паралельного алгоритму розфарбування ребер графу Edge Coloring / В. Денисюк та ін. // *Вісник Хмельницького національного університету*. 2025. Т. 357, № 5. С. 95–107. URL: <https://heraldts.khmnpu.edu.ua/index.php/heraldts/issue/view/35>. (дата звернення: 25.12.2025).

Пилипенко Олександр Миколайович - студент 1-го курсу, Вінницький національний технічний університет; факультет електроенергетики та електромеханіки, група ЕСМ-256; uasashauman06@gmail.com.

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com.

Pylypenko Oleksandr M. - Ist year student, Vinnytsia National Technical University; Faculty of Power Engineering and Electromechanics; uasashauman06@gmail.com

Sachaniuk-Kavets'ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets'ka Natalia V.** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnitsa National Technical University, skn1901@gmail.com