

ВЕКТОРНІ ОПЕРАЦІЇ В 3D-ГРАФІЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У дослідженні розглянуто основні типи векторних операцій — додавання, віднімання, скалярний та векторний добутки, нормалізацію та перетворення координат. Показано їхнє застосування в задачах комп'ютерної графіки: обчисленні нормалей до поверхонь, реалізації моделей освітлення, визначенні відбиття та заломлення, а також у побудові камер і трансформаціях об'єктів. Використання векторних операцій дозволяє досягати реалістичності 3D-сцен, оптимізувати алгоритми рендерингу та підвищити точність фізично-коректного моделювання.

Ключові слова: 3D-графіка, вектори, скалярний добуток, векторний добуток, нормалі, трансформації, освітлення, комп'ютерна графіка.

Abstract

This study examines the main vector operations—addition, subtraction, dot product, cross product, normalization, and coordinate transformations. Their applications in computer graphics are demonstrated: computing surface normals, implementing lighting models, determining reflection and refraction, and constructing cameras and object transformations. The use of vector operations enables realistic visualization of 3D scenes, optimization of rendering algorithms, and improvement of physically accurate simulation.

Keywords: 3D graphics, vectors, dot product, cross product, normals, transformations, lighting, computer graphics

Вступ

Сучасна 3D-графіка, що використовується у відеоіграх, анімації, кіноіндустрії та системах віртуальної реальності, базується на математичних моделях просторових об'єктів. Основою таких моделей є вектори, що описують положення точок, напрямки руху, орієнтацію поверхонь та взаємодію світла з матеріалами. Векторні операції забезпечують інструментарій для виконання ключових задач комп'ютерної графіки, таких як моделювання освітлення, побудова камер, визначення колізій, трансформації об'єктів та аналіз їхньої поведінки у просторі. Вони дозволяють точно описувати геометрію сцени, прогнозувати зміну положення та орієнтації об'єктів і формувати візуально коректне зображення.

Результати дослідження

Вивчення ролі векторних операцій у 3D-графіці показало, що вони формують фундамент математичних процедур, необхідних для коректного візуального відтворення тривимірних сцен. У ході дослідження встановлено, що подальший аналіз зосереджено на їхньому застосуванні для визначення просторових напрямків і положень, обчислення скалярних та векторних добутків, формування нормалей, нормалізації векторів, виконання трансформацій, моделювання освітлення та використання комбінованих векторно-матричних методів у графічних системах.

- Обчислення напрямку та позиції у просторі

$$\vec{p}_{new} = \vec{p} + \vec{v}$$

де $\vec{p}$ - початкова позиція об'єкта в просторі; $\vec{v}$ -вектор зсуву (напрямок і величина переміщення); $\vec{p}_{new}$ - нова позиція після переміщення. Це рівняння застосовується для обчислення руху об'єкта в просторі, наприклад у анімаціях, симуляціях фізики та пересуванні моделей.

- Скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta)$$

де $\vec{a}, \vec{b}$ – два вектори у просторі; $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ – їхні довжини; θ — кут між векторами. Це співвідношення застосовується для обчислення кута між векторами, визначення освітлення поверхні та видимості відносно джерела світла (модель Ламберта).

- Векторний добуток

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

де $\vec{a}, \vec{b}$ – два вектори, що лежать у площині; $\vec{n}$ – нормаль, вектор, перпендикулярний до площини. Ця формула застосовується для обчислення нормалі до поверхні, що є важливим у затіненні, освітленні, рендерингу, визначенні сторін полігона.

- Нормалізація вектора

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

де $\vec{v}$ – вихідний вектор; $|\vec{v}|$ – його довжина; $\hat{v}$ – одиничний вектор, напрямок, довжина=1. Це рівняння застосовується для отримання вектора напрямку, необхідного для освітлення, камери, фізичних симуляцій та нормалей.

- Матриця повороту

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

де $R(\theta)$ – матриця повороту навколо осі Z; θ – кут повороту; $\cos \theta$ і $\sin \theta$ - значення тригонометричних функцій. Ця матриця застосовується для повороту об'єкта або точки у тривимірному просторі, що використовується в анімації, управлінні камерою та змінах орієнтації моделей.

- Формула напрямку відбиття

$$\vec{R} = 2(\vec{N} \cdot \vec{L})\vec{N} - \vec{L}$$

де $\vec{L}$ – вектор напрямку світла, який падає на поверхню; $\vec{N}$ – нормаль до поверхні; $(\vec{N} \cdot \vec{L})$ – скалярний добуток, що визначає інтенсивність світла; $\vec{R}$ – напрямок відбитого променя. Це рівняння використовується у моделях освітлення (Фонга, Бліна-Фонга) та в трасуванні променів для визначення відбиття світла від поверхні.

У складних графічних рушіях використовуються комбіновані операції, що об'єднують:

- векторні добутки
- матричні перетворення
- нормалізацію
- інтерполяцію між векторами (LERP, SLERP).

Це дозволяє управляти анімаціями, камерою, моделями та фізичною взаємодією.

Висновки

У ході дослідження було з'ясовано, що векторні операції є базовим математичним інструментом для побудови 3D-графіки. Вони забезпечують точний опис просторових взаємодій, дозволяють формувати нормалі, здійснювати трансформації, розраховувати освітлення та визначати поведінку об'єктів у реальному часі. Використання таких операцій дає можливість оптимізувати процеси рендерингу, підвищити реалістичність сцени та забезпечити фізично-коректне моделювання. Комбінування векторних і матричних методів дозволяє створювати складні графічні системи, що застосовуються в ігрових рушіях, візуалізації, анімації та VR/AR-технологіях. Таким чином, векторні

операції є фундаментом сучасної комп'ютерної графіки та незамінними у моделюванні тривимірних об'єктів і сцен.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lengyel E. Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics. — 3rd Edition. — Course Technology PTR, 2012.
2. Авдєєв О. Ю., Гребенюк Д. В. Математичні основи комп'ютерної графіки. — КНЕУ, 2016.
3. Хейлі Г. Геометричні перетворення в комп'ютерній графіці. — К.: Наукова думка, 2015.
4. Інтернет-джерело Open GL Wiki. Vector and Matrix Operations in Computer Graphics URL: https://wikis.khronos.org/opengl/Main_Page
5. Хом'юк І. В. Елементи лінійної алгебри та лінійного програмування: навчальний посібник / Хом'юк І. В., Хом'юк В. В., Сачанюк-Кавецька Н.В. — Вінниця: ВНТУ. — 2025. 151с.
6. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 1 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. — Вінниця : ВНТУ, 2017. — 199 с.

Полюга Тарас Андрійович – студент групи 2КІ-24б факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: polugataras053@gmail.com

Хом'юк Віктор Вікторович – к.т. н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Polyuga Taras Andriyovych – student of group 2KI-24b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: polugataras053@gmail.com

Khomyuk V. V. – Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiravvh@gmail.com