

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗКЛАДІВ ТЕЙЛОРА І ЛОРАНА ТА ЇХ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ СТРУКТУРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті здійснено аналітичне дослідження рядів Тейлора і Лорана як ключових інструментів опису аналітичних функцій комплексної змінної. Розглянуто умови існування степеневих розкладів, охарактеризовано їх збіжність та показано зв'язок між аналітичністю функції та можливістю її локального подання у вигляді степеневих рядів. Особливу увагу приділено ряду Лорана як засобу аналізу функцій поблизу ізольованих особливих точок та основі класифікації сингулярностей. Результати мають вагомe значення для подальшого розвитку теорії комплексного інтегрування та прикладних математичних методів.

Ключові слова: аналітична функція, степеневий ряд, ряд Тейлора, ряд Маклорена, ряд Лорана, особлива точка, сингулярність.

Abstract

The article presents an analytical study of Taylor and Laurent series as key tools for describing analytic functions of a complex variable. The conditions for the existence of power series expansions are examined, their convergence is characterized, and the relationship between the analyticity of a function and the possibility of its local representation in the form of power series is demonstrated. Special attention is given to the Laurent series as a means of analyzing functions near isolated singular points and as a basis for classifying singularities. The results are of significant importance for the further development of complex integration theory and applied mathematical methods.

Keywords: analytic function, power series, Taylor series, Maclaurin series, Laurent series, singular point, singularity.

Вступ

Теорія аналітичних функцій комплексної змінної є фундаментальною галуззю математичного аналізу, що поєднує строгі теоретичні засади з широкими можливостями практичного застосування у фізиці, техніці та інженерних науках. На відміну від дійсних функцій, комплексні аналітичні функції характеризуються тим, що їх диференційовність у деякій області автоматично забезпечує представлення у вигляді степеневого ряду, що відображає глибокі внутрішні властивості таких функцій [1; 9].

Особливе місце в аналізі поведінки аналітичних функцій займають ряди Тейлора і Лорана. Перший використовується для дослідження функцій у звичайних точках області аналітичності, тоді як другий дає можливість описувати функції в околах ізольованих особливих точок. Це робить дослідження відповідних розкладів актуальним для як теоретичної математики, так і прикладних задач математичної фізики, моделювання та аналізу складних технічних систем [5].

Результати дослідження

Аналітична функція комплексної змінної визначається як функція, що є диференційовною в кожній точці певної області. Згідно з фундаментальною теоремою комплексного аналізу, така функція може бути локально представлена у вигляді степеневого ряду, що збігається абсолютно та рівномірно в межах свого круга збіжності [9]. Ця властивість забезпечує можливість почленного диференціювання і інтегрування ряду, що робить його ефективним інструментом дослідження.

Ряд Тейлора є основною формою представлення аналітичної функції в околі звичайної точки. Його коефіцієнти обчислюються через похідні функції в точці розкладу, що гарантує єдиність представлення. Радіус збіжності ряду визначається відстанню від центру розкладу до найближчої особливої точки. Таким

чином, геометрія розташування сингулярностей у комплексній площині суттєво впливає на поведінку степеневих розкладів [2; 7]. Спеціальним випадком цього розкладу є ряд Маклорена, що широко застосовується в задачах наближеного аналізу, побудови асимптотичних формул та моделювання складних залежностей [6].

У випадку, коли функція має ізольовану особливу точку, застосування ряду Тейлора стає неможливим. У таких ситуаціях функція може бути представлена у вигляді ряду Лорана — двостороннього степеневого розкладу, який містить як додатні, так і від’ємні степені комплексної змінної. Це дозволяє описувати поведінку функції в кільцевих областях та досліджувати структуру її особливостей [3].

Головна частина ряду Лорана дає змогу класифікувати типи ізольованих сингулярностей:

- усувні особливі точки, у яких головна частина відсутня;
- полюси, що характеризуються скінченною кількістю від’ємних степенів;
- істотні особливі точки, у яких головна частина містить нескінченно багато від’ємних степенів [4; 8].

Ця класифікація є ключовою для застосування теореми про лишки та методів комплексного інтегрування, що широко використовуються в математичній фізиці, теорії електричних кіл і багатьох інших галузях.

Результати дослідження підтверджують, що степеневі розклади є не лише теоретично значущими, але й безпосередньо застосовуються при побудові чисельних алгоритмів, аналізі сигналів, розв’язуванні диференціальних рівнянь і моделюванні інженерних систем. Розклади Тейлора забезпечують точні локальні апроксимації, тоді як ряди Лорана дозволяють працювати з функціями, що мають складну структуру особливих точок.

Висновки

Проведене дослідження демонструє, що ряди Тейлора і Лорана є фундаментальними інструментами комплексного аналізу, які забезпечують глибоке розуміння локальної структури аналітичних функцій. Ряд Тейлора дає можливість точно описувати поведінку функцій у звичайних точках, тоді як ряд Лорана забезпечує ефективний аналіз у випадках наявності ізольованих особливих точок.

Сукупність властивостей цих розкладів визначає їхню центральну роль як у теоретичній математиці, так і в прикладних дисциплінах, де необхідні методи точного локального аналізу та інструменти комплексного інтегрування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теорія функцій комплексної змінної : навч. посіб. / НТУУ «КПІ». – Київ, 2018. – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/items/fedd0c89-2797-47bf-869c-ccf72be72aa7>
2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора : навчальні матеріали. – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/7319580/page:14/>
3. Ряд Лорана // Wikiwand. – Режим доступу: https://www.wikiwand.com/uk/articles/Ряд_Лорана
4. Функції комплексної змінної : конспект лекцій. – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/16447781/>
5. Ряди Тейлора і Маклорена : навч. посіб. – Режим доступу: https://vuzlit.com/931746/ryadi_teylora_makloreyna
6. Ряди Тейлора та Маклорена і їх збіжність : навчальні матеріали. – Режим доступу: <https://yukhym.com/uk/ryadi-ta-jikh-zbizhnist/ryadi-tejlora-ta-maklore-na-rozkladu-funktsij.html>
7. Ряди Тейлора : лекційні матеріали. – Режим доступу: <https://www.lectures.7mile.net/lec-matanaliz/9-2-5-ryadu-teylora.htm>
8. Теорія функцій комплексної змінної : методичні вказівки. – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/11754711/page:4/>
9. Серія Тейлора і Лорана // LibreTexts Україна. – Режим доступу: [https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/Аналіз/Складні_змінні_з_додатками_\(Orloff\)/08:_Серія_Тейлор_і_Лоран](https://ukrayinska.libretexts.org/Математика/Аналіз/Складні_змінні_з_додатками_(Orloff)/08:_Серія_Тейлор_і_Лоран)

Сидорук Владислав Володимирович – студент групи 1KI-24б, факультет інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vladislavsidoruk1200@gmail.com

Sidoruk Vladyslav Volodymyrovych – student of group 1KI-24b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vladislavsidoruk1200@gmail.com