

## ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В ЕНЕРГЕТИЦІ

Вінницький національний технічний університет

### Анотація

У цій роботі розглянуто використання інтегрального числення в енергетиці. Інтеграли застосовують для визначення електричної енергії, роботи струму, аналізу змінного струму та теплових процесів в енергетичних установках. За допомогою інтегрального числення можна описувати реальні процеси, у яких потужність, струм і напруга змінюються з часом. Також інтеграли використовуються під час моделювання роботи генераторів, турбін і електричних мереж. Отримані знання дозволяють краще зрозуміти принципи роботи енергетичних систем і застосовувати математичні методи для розв'язання практичних задач у галузі енергетики..

**Ключові слова:** інтегральне числення, енергетика, електрична енергія, потужність, напруга.

### Abstract

In this paper, we will consider the use of integral calculus in power engineering. Integrals are used to determine electrical energy, work done by current, analyze alternating current and thermal processes in power plants. With the help of integral calculus, you can describe real processes in which power, current and voltage change over time. Integrals are also used when modeling the operation of generators, turbines and electrical networks. The knowledge gained allows you to better understand the principles of operation of power systems and apply mathematical methods to solve practical problems in the field of power engineering.

**Keywords:** integral calculus, energy, electric energy, power, voltage.

### Вступ

Енергетика є однією з найважливіших галузей сучасного суспільства, адже від її стабільної та ефективної роботи залежить розвиток промисловості, економіки та рівень життя людей. Виробництво, передача й споживання електричної енергії пов'язані зі складними фізичними процесами, які постійно змінюються в часі та просторі. Для їх аналізу та точного розрахунку широко застосовуються математичні методи, зокрема інтегральне обчислення.

Інтегральне числення дає можливість визначати кількість електричної енергії, спожитої за певний проміжок часу, розраховувати роботу електричного струму, аналізувати змінні навантаження та теплові процеси в енергетичному обладнанні. Воно є необхідним інструментом під час дослідження роботи електростанцій, трансформаторів, ліній електропередач і різних типів турбін. Саме за допомогою інтегралів можна більш точно описати реальні режими роботи енергосистем, у яких потужність, струм і напруга не є сталими величинами.

Крім того, інтегральне числення використовується для моделювання перехідних процесів, що виникають під час пуску та зупинки енергетичних установок, а також при аварійних режимах. Це дозволяє підвищити надійність і безпеку енергетичних систем, а також оптимізувати їхню роботу. Тому вивчення інтегрального обчислення є важливим етапом у підготовці майбутніх фахівців у галузі енергетики та електротехніки.

Метою даної роботи є детальний розгляд основних напрямів застосування інтегрального числення в енергетиці та необхідність показати його значення для розв'язання практичних інженерних задач.

### Результати дослідження

Напруга визначається як різниця потенціалів між двома точками. Для точних вимірювань використовують пристрої збору даних із правильним діапазоном сигналів, підсилювачами та врахуванням заземлення, шумів і перешкод. Струм виникає при замкненому колі. Амперметри

вимірюють його послідовно, але розмикають коло та повинні мати низький опір. В енергетичних застосуваннях використовують прямі методи (шунт з низьким опором і вимір падіння напруги) або непрямі методи (через магнітне поле: котушки Роговського, датчики Холла), що забезпечують гальванічну ізоляцію. Електрична потужність визначається як добуток струму та напруги в даний момент, а енергія – як інтеграл потужності за часом.

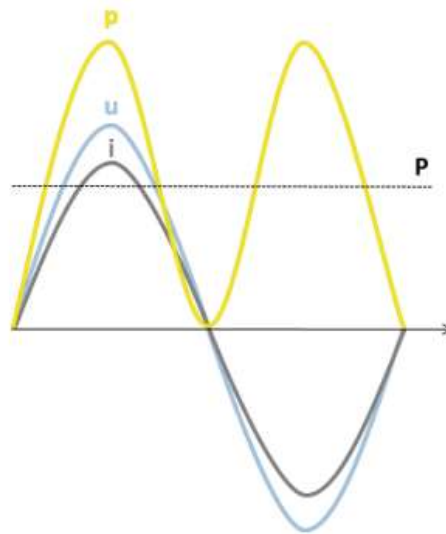


Рисунок 1. Зв'язок між сигналом напруги, струму та потужності

Для точного розрахунку використовується фазова автопідстроювання частоти (ФАПЧ), що синхронізує частоту дискретизації з сигналами напруги. FFT-аналіз напруги та струму дозволяє визначити амплітуду та  $\cos(\phi)$  кожної гармоніки, враховувати спотворення підсилювачів і коригувати результати. Після цього RMS-значення гармонік підсумовуються для обчислення основних величин потужності.

Таблиця 1

Розрахунок видимої, активної та реактивної потужності

| Потужність | Певна гармоніка $h$             | Загальне значення                                    | Пояснення позначень                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------|---------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Видима     | $S_h = U_h * I_h$               | $S = U_{rms,total} * I_{rms,total}$                  | $U_h$ — діюче значення напруги $h$ -ї гармоніки<br>$I_h$ — діюче значення струму $h$ -ї гармоніки<br>$\phi_h$ — фазовий кут між струмом і напругою<br>$h$ — номер гармоніки<br>$H$ — максимальна врахована гармоніка<br>RMS — діюче (ефективне) значення |
| Активна    | $P_h = U_h * I_h * \cos \phi_h$ | $P = \sum_{h=1}^H P_h$                               |                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Реактивна  | $Q_h = U_h * I_h * \sin \phi_h$ | $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$ або<br>$Q = \sum_{h=1}^H Q_h$ |                                                                                                                                                                                                                                                          |

**Активна потужність  $P$**  — це корисна енергія, яка передається споживачу й перетворюється, наприклад, у механічну роботу.

**Реактивна потужність  $Q$**  потрібна для створення магнітних і електричних полів, але не виконує корисної роботи; вона знижує пропускну здатність мережі, збільшує струми та навантаження на лінії, потребуючи компенсації.

**Коефіцієнт потужності** показує ефективність передачі енергії: чим він вищий, тим менші струми й втрати.  **$\cos \phi$**  характеризує фазовий зсув між напругою та струмом для окремих гармонік, тоді як коефіцієнт потужності описує систему загалом.

**Розрахунок енергоефективності та ефективності.** Електроенергія розглядається як потік потужності за час, тому її споживання легко визначити. Напрямок потоку потужності задає знак енергії: додатний — споживання, від'ємний — віддача. Це дає змогу оцінювати енергетичні потоки

та ефективність систем. Одиниця вимірювання енергії — ват-година [Вт/год], а ефективність визначається як відношення вихідних і вхідних величин та виражається у відсотках.

Таблиця 2

### Розрахунок енергії

| Опис                            | Функціонування                                 | Пояснення значень                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Енергія(загальна)               | $E = \int_{t=0}^T p(t)dt$                      | $E$ — загальна енергія за час $t$ ;<br>$p(t)$ — миттєва потужність;<br>$E_{motor}$ — енергія, яку споживає двигун;<br>$p_{mot}$ — потужність двигуна, коли вона додатна.<br>$E_{recuperation}$ - енергія, що повертається в систему |
| Позитивна енергія<br>$P(t) > 0$ | $E_{motor} = \int_{t=0}^T p_{mot}(t)dt$        |                                                                                                                                                                                                                                     |
| Негативна енергія<br>$P(t) < 0$ | $E_{recuperation} = \int_{t=0}^T p_{mot}(t)dt$ |                                                                                                                                                                                                                                     |

### Інтегральна форма для напруги (різниця потенціалів)

$$V_b - V_a = - \int_a^b E * ds$$

Пояснення:

- $V_a$  і  $V_b$  — електричні потенціали в двох точках кола;
- $E$  — електричне поле;
- $ds$  — елемент шляху між точками  $a$  і  $b$ .

Ця формула показує, що різниця потенціалів (напруга) — це інтеграл електричного поля вздовж шляху між двома точками. Напруга визначається як робота, необхідна для переміщення одиничного заряду між цими точками.

### Інтегральна форма потужності (для змінного струму)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U(t) * I(t) * dt$$

Пояснення:

- $W$  — енергія або робота електричного струму за проміжок часу;
- $U(t)$  і  $I(t)$  — напруга і струм як функції часу;
- $t$  — час.

Це той самий вираз, що енергія = інтеграл миттєвої потужності — добутку напруги й струму — за час роботи.

### Висновок

Інтегральне обчислення є важливим математичним інструментом в енергетиці, оскільки дає змогу точно визначати електричну енергію, роботу струму та аналізувати процеси, що змінюються з часом. Його застосування дозволяє моделювати роботу енергетичних установок, генераторів і мереж, а також оцінювати ефективність енергетичних систем. Отримані знання сприяють глибшому розумінню фізичних процесів та підвищують якість розв'язання практичних задач у галузі енергетики.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. <https://www.neo-messtechnik.com/en/power-quality-explained-chapter-2-electric-power-energy>  
(Дата звернення:28.12.2025)
2. [https://physics.stackexchange-com.translate.goog/questions/430235/definition-of-voltage-using-integral-minus-sign?\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=uk&\\_x\\_tr\\_hl=ru&\\_x\\_tr\\_pto=wapp](https://physics.stackexchange-com.translate.goog/questions/430235/definition-of-voltage-using-integral-minus-sign?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=uk&_x_tr_hl=ru&_x_tr_pto=wapp)  
(Дата звернення:29.12.2025)
3. [https://kfe.khmnua.edu.ua/wp-content/uploads/sites/69/2024/11/tek\\_final.pdf?](https://kfe.khmnua.edu.ua/wp-content/uploads/sites/69/2024/11/tek_final.pdf?)  
(Дата звернення:29.12.2025)

**Олефіренко Карина Євгенівна** - Вінницький національний технічний університет, студентка першого курсу, ФЕЕЕМ, [olefirenkokenya@gmail.com](mailto:olefirenkokenya@gmail.com)

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

**Olefirenko Karyna E.** Vinnytsia National Technical University, first-year student, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, [olefirenkokenya@gmail.com](mailto:olefirenkokenya@gmail.com)

**Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, [skn1901@gmail.com](mailto:skn1901@gmail.com)