

Чисельні методи оптимізації

Вінницький національний технічний університет

Анотація:

У цій роботі розглядається зв'язок між вищою математикою та логікою творення алгоритмів. Увагу приділено дискретизації неперервних процесів. Застосуванню градієнтних методів як ухвалення рішень у програмних системах. Проаналізовано кореляцію між математичною збіжністю та обчислювальною складністю алгоритмів.

Ключові слова: чисельні методи, градієнт, збіжність, оптимізація, дискретизація, алгоритмізація.

Abstract:

This work examines the connection between higher mathematics and the logic of creating algorithms. Attention is paid to discretization of continuous processes. Application of gradient methods as decision-making in software systems. The correlation between mathematical convergence and computational complexity of algorithms is analyzed.

Keywords: numerical methods, gradient, convergence, optimization, discretization, algorithmization.

Вища математика та програмування поєднується в розвитку сучасних обчислювальних систем. Програмування виступає не лише як засіб автоматизації, а як практичне втілення математичних теорій. Найкраще цей зв'язок простежується в чисельних методах де неперервні математичні моделі адаптуються до дискретного логічного середовища комп'ютера.

Найскладніше при поєднанні цих сфер – перехід від математики до дискретного коду. У програмуванні неможливо оперувати нескінченно малими величинами, тому використовується метод дискретизації. Математично це виражається через наближення похідної:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

де $f(x + \Delta x) - f(x)$ – приріст функції, а Δx – крок алгоритму.

Це перетворення дозволяє замінити аналітичне диференціювання ітераційним циклом у коді програми.

Математичне поняття градієнта $\nabla f(x)$ визначає напрямок найшвидшого зростання функції[1]. В алгоритмах оптимізації він стає інструментом для керування потоком виконання програми. Кожна ітерація алгоритму розраховує нове наближення до розв'язку за формулою:

$$x_{k+1} = x_k - \eta \cdot \nabla f(x_k)$$

де x_{k+1} – наступне значення, x_k – поточне значення, $\nabla f(x_k)$ – градієнт функції в поточній точці, а η – параметр швидкості навчання.

Цей процес візуалізується як поступовий спуск до мінімуму цільової функції.

Як продемонстровано на рисунку 1, математична модель утворює топологію поверхні, тоді як алгоритм забезпечує дискретне переміщення по ній. Кожна точка на червоній траєкторії відповідає завершенню одного ітераційного циклу в програмі. Збіжність алгоритму вважається досягнутою, коли кожна наступна ітерація перестає суттєво змінювати значення цільової функції, що математично фіксується як досягнення заданого порогу точності ϵ [2].

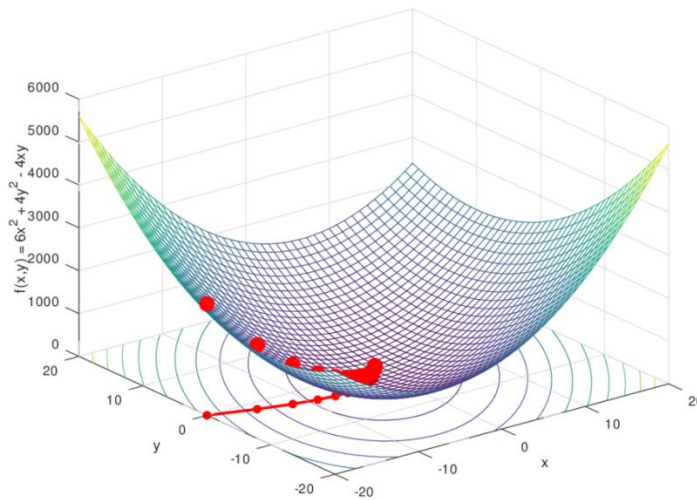


Рисунок 1 – Візуалізація процесу збіжності градієнтного алгоритму

Аналіз представленої візуалізації (рис. 1) дозволяє зробити висновок, що ефективність програмної реалізації математичної моделі критично залежить від вибору параметрів ітераційного процесу. У точках, де поверхня має великий нахил, градієнт набуває максимальних значень, що пришвидшує роботу алгоритму. Однак при наближенні до екстремуму швидкість збіжності може сповільнюватися, що вимагає використання адаптивних кроків обчислення для запобігання осциляціям навколо розв'язку.

Крім того, математичне обґрунтування дозволяє заздалегідь оцінити стійкість алгоритму до похибок округлення, що виникають через обмежену точність представлення чисел у пам'яті комп'ютера. Саме баланс між точністю математичної апроксимації та часовою складністю коду є головним критерієм якості сучасного програмного забезпечення [3].

Розуміння природи градієнтних методів та принципів дискретизації дозволяє розробнику створювати стабільне програмне забезпечення, здатне ефективно вирішувати актуальні прикладні задачі оптимізації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Методи обчислень: підручник / І. І. Ляшко, М. А. Новіков, О. К. Боярчук, В. Г. Кривошея. Київ : Вища школа, 2006. – 429 с.
2. Кормен Т. Вступ до алгоритмів / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Рівест, К. Стайн; пер. з англ. Київ : К.І.С., 2019. – 1288 с.
3. Трохимчук П. П. Математичне моделювання та чисельні методи: навч. посіб. / П. П. Трохимчук. – Луцьк: Вежа-Друк, 2015. – 464 с.

Добрянська Діана Володимирівна – студентка групи ІПІ-246, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dianablog777@gmail.com

Науковий керівник: **Кирилячук Світлана Анатоліївна** – к. пед. н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: kyrylashchuk@vntu.edu.ua

Dobryanska Diana V. – Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dianablog777@gmail.com

Supervisor: **Kyrylashchuk Svitlana A.** - Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: kyrylashchuk@vntu.edu.ua