

ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено потенціал використання комплексних чисел як ефективного математичного апарату для розв'язання задач комп'ютерної графіки. Основна увага приділяється застосуванню комплексної арифметики для представлення точок двовимірного простору, що дозволяє значно спростити алгоритми геометричних перетворень.

Розглянуто специфічні сфери застосування функцій комплексної змінної, такі як конформні відображення для текстурування поверхонь без викривлень та процедурне моделювання.

Ключові слова: комплексні числа, комп'ютерна графіка, геометричні перетворення, 2D-обертання, фрактали, перетворення Фур'є, обробка зображень, конформні відображення, частотна область, шейдери

Abstract

This paper investigates the potential of using complex numbers as an effective mathematical tool for solving computer graphics problems. The main focus is on the application of complex arithmetic for representing points in two-dimensional space, which significantly simplifies geometric transformation algorithms.

Specific areas of application of complex variable functions are considered, such as conformal mappings for texture mapping without distortion and procedural modeling.

Keywords: complex numbers, computer graphics, geometric transformations, 2D rotation, fractals, Fourier transform, image processing, conformal mappings, frequency domain, shaders

Вступ

Комплексні числа відіграють важливу роль у комп'ютерній графіці як зручний математичний інструмент для опису і виконання широкого кола операцій над двовимірними об'єктами, а також для побудови алгоритмів, що працюють у частотній області. Навіть там, де в кінцевому вигляді використовується матрична алгебра чи векторні операції, представлення через комплексні числа часто спрощує розуміння процесу та зменшує кількість обчислень. У цьому тексті стисло розглянуто основні застосування комплексних чисел у графіці, їхні переваги та обмеження, а також наведено кілька реальних прикладів використання.

Результати дослідження

На базовому рівні комплексне число $z = x + iy$ розглядають як точку (x, y) або як вектор у двовимірному просторі. Це дає природний зв'язок між арифметикою комплексних чисел і геометрією плоскої системи координат [4;5]. Одне з найчастіших застосувань — обертання і масштабування у площині. Помноживши комплексне число z на інше комплексне число $r \cdot e^{i\theta}$ (або $r(\cos \theta + i \sin \theta)$), ми одночасно виконуємо масштабування на r і обертання на кут θ . Це дозволяє замінити матрицю обертання 2×2 на одне комплексне множення, що економить пам'ять і обчислення в простих алгоритмах маніпуляції об'єктами та векторної графіки.

Ще одна важлива сфера — відображення і перетворення координат через аналітичні функції комплексної змінної. Конформні відображення, які зберігають кути, широко використовуються для текстурної прив'язки, де потрібно перенести текстуру на поверхню без локальних перекидувань кутів. Карти, що отримані за допомогою відображень виду $w = f(z)$, можуть створювати складні деформації з простими формулами. Це застосовується при генерації декоративних ефектів при процедурному моделюванні та у візуалізації геометричних трансформацій [2].

Комплексні числа лежать в основі фрактальних зображень, найбільш відомими з яких є множина Мандельброта і множини Джулії. Алгоритм побудови цих множин базується на ітерації простих комплексних функцій і перевірці збіжності послідовності. Незважаючи на простоту правил, результатом є надзвичайно складні й привабливі візерунки, що широко використовуються для генерації графічних ефектів, фонових зображень, інтерактивних інсталяцій та навчальних візуалізацій.

У задачах обробки зображень комплексні числа поширені через перехід до частотної області. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) та його швидкий алгоритм БПФ (FFT) оперують з комплексними спектрами. Прецизне представлення амплітуди та фази сигналу дає змогу робити фільтрацію, усунення шуму, корекцію освітленості та інші перетворення ефективно. Наприклад, видалення низькочастотних компонентів у спектрі може посилити контури, а робота з фазою дозволяє реалізувати корекцію зсувів і вирівнювання текстур. У реалізації фільтрів у частотній області комплексні числа — це основа, яка дозволяє описати процес більш природно, ніж робота лише з реальними масивами [1].

Комплексні представлення також використовуються для створення аналітичних сигналів у задачах обробки контурів і градієнтів. Габорові фільтри, які є поєднанням гаусового вікна та косинусної хвилі, працюють у комплексній формі і корисні для виявлення локальних спрямованих текстур. Фазова інформація, що міститься у комплексних коефіцієнтах, може давати відомості про локальну структуру зображення, важливі для задач виявлення країв, реєстрації зображень і відстеження руху.

У графічних шейдерах і ГПУ-програмуванні комплексні операції часто реалізують як операції над парами чисел. Це зручно в шейдерах, де простота вираження обертання або хвильових ефектів через множення на $e^{i\theta}$ дозволяє писати компактні й швидкі програми. При створенні процедурних текстур, хвилеподібних деформацій поверхні або синтезі оптичних явищ використання комплексних формул дає зрозумілу інтерпретацію і полегшує інтонацію параметрів.

Реальні приклади включають: 1) застосування множення комплексних чисел для обертання 2D-спрайтів у ігрових рушіях без побудови матриць; 2) генерацію мап нормалей для плоских текстур через перетворення в частотну область і зворотне відновлення через БПФ; 3) рендеринг фракталів як елементів декору і тестування підсистем обробки зображень; 4) використання комплексних фільтрів для виявлення лінійних структур на медичних або супутникових знімках.

Проте комплексні числа мають і обмеження. Для тривимірних обертів у просторі комплексної алгебри вже не вистачає — тут на зміну приходять кватерніони або матриці $3 \times 3/4 \times 4$. Кватерніони можна розглядати як узагальнення комплексних чисел, що дозволяє зручно представляти обертання в трьох вимірах, але їхня інтерпретація складніша. Також в обчисленнях націлених на апаратне прискорення варто пам'ятати про питання чисельної стійкості і точності при роботі з комплексними коефіцієнтами, особливо у високочастотних операціях або при великій глибині ітерацій, як у фракталах.

При практичній реалізації важливо враховувати ефективність: у багатьох мовах і бібліотеках робота з комплексними числами оптимізована, але на графічних процесорах може бути доцільніше оперувати двокомпонентними векторами явних типів. Також слід проектувати алгоритми з урахуванням граничних випадків, наприклад уникати деградації через накопичення похибок при багаторазових множеннях або при переході між часовою і частотною областями [3].

Висновки

Комплексні числа — це зручний інструмент у наборі методів комп'ютерної графіки. Вони дають простіші вирази для обертання і масштабування в площині, дозволяють описувати складні відображення і створювати ефектні фрактальні зображення, а також є основою для багатьох операцій у частотній області, що необхідні для обробки зображень і синтезу текстур.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Базилевич, Л. С. Основи комп'ютерної графіки: Навч. посіб. Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2012. 352 с.
2. Григорович, В. В. Математичні основи комп'ютерної графіки. Київ : НАУ, 2017. 256 с.
3. Жуков, А. В. Фрактальна графіка: використання комплексних чисел для генерації зображень. Вісник Київського національного університету. Серія: Фізико-математичні науки. 2019. № 1(80). С. 45–52.

4. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 2 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 148 с.

5. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 1 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 199 с.

Вознюк Євеліна Сергіївна — студентка групи ІПКТ-24б, кафедра комп'ютерних наук, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: evelinvozn@gmail.com

Хом'юк Ірина Володимирівна — д-р пед. наук, професор кафедри вищої математики, , Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: homyuk@vntu.edu.ua

Khomyuk Iryna Vlodymyryvna — Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: homyuk@vntu.edu.ua

Vozniuk Evelina Serhiivna — student of ІPCT-24b group, Department of Computer Science, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: evelinvozn@gmail.com