

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДЛЯ АНАЛІЗУ РИНКОВОЇ РІВНОВАГИ: НАДЛИШОК СПОЖИВАЧА ТА ВИРОБНИКА

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі проведено дослідження застосування апарату інтегрального числення для моделювання та аналізу економічних процесів в умовах ринкової економіки. Обґрунтовано доцільність використання визначеного інтеграла для розрахунку ключових показників ефективності ринку: надлишку споживача та надлишку виробника. Розглянуто математичні моделі функцій попиту та пропозиції, наведено алгоритм знаходження точки ринкової рівноваги та обчислення загального суспільного добробуту. На практичному прикладі продемонстровано методику обчислення економічної вигоди сторін за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

Ключові слова: визначений інтеграл, ринкова рівновага, функція попиту, функція пропозиції, надлишок споживача, економічне моделювання.

Abstract

The paper investigates the application of integral calculus for modelling and analysing economic processes in a market economy. It substantiates the feasibility of using definite integrals to calculate key market efficiency indicators: consumer surplus and producer surplus. Mathematical models of supply and demand functions are considered, and an algorithm for finding the market equilibrium point and calculating total social welfare is presented. A practical example demonstrates the method of calculating the economic benefit of the parties using the Newton-Leibniz formula.

Keywords: definite integral, market equilibrium, demand function, supply function, consumer surplus, economic modeling.

Вступ

Сучасна економічна теорія неможлива без використання потужного математичного апарату. Однією з фундаментальних задач мікроекономіки є оцінка ефективності функціонування ринку та визначення реальної вигоди, яку отримують його учасники – покупці та продавці. Часто ця вигода не є очевидною, оскільки вона не відображається безпосередньо у фінансових транзакціях, а існує у вигляді «зеконормлених» коштів або додаткового прибутку. Для кількісної оцінки цих показників використовують поняття надлишку споживача (Consumer Surplus) та надлишку виробника (Producer Surplus). Математично ці величини є площами відповідних криволінійних фігур на графіку попиту та пропозиції. Оскільки реальні функції попиту та пропозиції рідко є лінійними, застосування методів елементарної геометрії стає неможливим. Саме тому визначений інтеграл виступає необхідним інструментом для точного аналізу та прогнозування ринкової ситуації.

Результати дослідження

Розглянемо модель ринку досконалої конкуренції. Поведінка споживачів формалізується функцією попиту:

$$p_0 = D(x_0),$$

де p_0 – ціна одиниці товару, а x_0 – кількість товару, яку споживачі готові придбати за цією ціною. Функція попиту є монотонно спадною, що відображає закон попиту: зі зростанням ціни обсяг попиту зменшується. Поведінка виробників описується функцією пропозиції

$$p_0 = S(x_0),$$

яка є монотонно зростаючою: чим вища ціна на ринку, тим більше товару готові виробити та продати підприємства.

Стан ринку, при якому наміри покупців збігаються з намірами продавців, називається ринковою рівновагою. Точка рівноваги (x_0, p_0) визначається алгебраїчно шляхом розв'язання системи рівнянь або прирівнювання функцій:

$$D(x_0) = S(x_0),$$

де x_0 – рівноважний обсяг товару, а p_0 – рівноважна ціна, за якою відбуваються реальні угоди на ринку.

Надлишок споживача – це різниця між максимальною ціною, яку споживач готовий був заплатити за кожну додаткову одиницю товару, та фактичною ринковою ціною p_0 . З точки зору математичного аналізу, якщо розбити інтервал кількості товару $[0; x_0]$ на нескінченно малі відрізки dx , то сума добутків ціни на цей малий обсяг являтиме собою інтегральну суму Рімана. У переході ця сума стає визначеним інтегралом, який чисельно дорівнює площі під кривою попиту. Отже, загальна корисність від споживання тов. граничному ару обчислюється як інтеграл від функції попиту. Віднявши від цієї величини фактичні витрати споживачів (x_0, p_0), отримуємо формулу надлишку споживача:

$$CS = \int_0^{x_0} D(x)dx - p_0x_0$$

Цей показник характеризує чистий вигрaш суспільства від існування ринку даного товару.

Аналогічні міркування застосовуються і до виробників. Надлишок виробника – це різниця між сумою, яку виробники фактично отримали за товар, та мінімальною сумою, за яку вони були готові його продати (що визначається їхніми граничними витратами). Геометрично це площа фігури, розташованої над кривою пропозиції $S(x)$ та під лінією рівноважної ціни $p = p_0$. Формула розрахунку має вигляд:

$$PS = p_0x_0 - \int_0^{x_0} S(x)dx,$$

де вираз (x_0, p_0) – це загальна виручка продавців, а інтеграл відображає змінні витрати на виробництво продукції обсягом x_0 .

Продемонструємо застосування наведених формул на конкретному прикладі. Нехай аналітичний відділ компанії встановив, що функції попиту та пропозиції на певний програмний продукт описуються рівняннями:

Функція попиту: $D(x) = 20 - x$

Функція пропозиції: $S(x) = 2 + x$

На першому етапі знайдемо параметри ринкової рівноваги:

$$20 - x = 2 + x$$

$$2x = 18 \Rightarrow x_0 = 9$$

Підставивши значення x_0 у будь-яке з рівнянь, знайдемо рівноважну ціну:

$$p^0 = 20 - 9 = 11$$

На другому етапі обчислимо надлишок споживача (CS), використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла та формулу Ньютона-Лейбніца:

$$CS = \int_0^9 (20 - x)dx - 11 \cdot 9$$

$$CS = \left(20x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^9 - 99$$

$$CS = \left(20 \cdot 9 - \frac{81}{2} \right) - 99$$

На третьому етапі обчислимо надлишок виробника (PS):

$$PS = 11 \cdot 9 - \int_0^9 (2 + x)dx$$

$$PS = 99 - \left(2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^9$$

$$PS = 99 - (18 + 40.5)$$

Отримані результати ($CS = 40.5$ та $PS = 40.5$) свідчать про те, що загальний суспільний добробут від функціонування даного ринку становить 81 умовну грошову одиницю. Рівність надлишків у даному випадку зумовлена симетричністю коефіцієнтів еластичності попиту та пропозиції, проте в реальних умовах ці показники можуть суттєво відрізнятися.

Висновки

У роботі показано, що визначений інтеграл є не просто абстрактним математичним поняттям, а потужним інструментом прикладного економічного аналізу. Використання інтегрального числення дозволяє переходити від якісних оцінок до точних кількісних вимірювань ефективності ринку. Розрахунок площ під кривими попиту та пропозиції дає змогу не лише оцінити поточний стан ринку, але й прогнозувати зміни суспільного добробуту при втручанні держави (наприклад, введення податків, мит або фіксованих цін). Таким чином, математичні методи є невід'ємною складовою сучасної економічної аналітики та прийняття обґрунтованих управлінських рішень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. / В. В. Вітлінський. – Київ : КНЕУ, 2003. – 408 с.
3. Барковський В. В. Вища математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – 5-те вид. – Київ : Центр учб. літ., 2010. – 448 с.
4. Дораш А. В. Вища математика в прикладах і задачах: Економічний профіль : навч. посіб. / А. В. Дораш. – 2-ге вид. – Київ : Центр учб. літ., 2009. – 594 с.
5. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 2 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 148 с.
6. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 1 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 199 с.

Сицевіч Роман Васильович – студент групи ІПКТ-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: sytsevichmain@gmail.com.

Науковий керівник: **Хом'юк Ірина Володимирівна** – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com.

Sytsevich Roman Vasylovych – student of group 1PKT-24b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: sytsevichmain@gmail.com.

Supervisor: **Khomyuk Irina Volodymyrivna** – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com.