

ПОХІДНА ЯК ЗАСІБ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

У роботі розглянуто похідну як один із основних інструментів математичного аналізу для моделювання реальних процесів, що змінюються в часі. Показано, що використання похідної дозволяє описувати швидкість і характер зміни фізичних, економічних та технічних величин, а також аналізувати динаміку процесів і визначати оптимальні параметри їх перебігу. На основі функціональних залежностей та їх похідних досліджено приклади механічного руху, процесів зростання і оптимізації. Отримані результати підтверджують ефективність застосування похідної для кількісного аналізу та прогнозування поведінки реальних систем.

Ключові слова: похідна, математичне моделювання, швидкість зміни, оптимізація, реальні процеси.

Abstract

The paper considers the derivative as one of the main tools of mathematical analysis for modeling real processes that change over time. It is shown that the use of derivatives makes it possible to describe the rate and nature of changes in physical, economic, and technical quantities, as well as to analyze process dynamics and determine optimal parameters of their behavior. Based on functional relationships and their derivatives, examples of mechanical motion, growth processes, and optimization problems are studied. The obtained results confirm the effectiveness of derivatives in quantitative analysis and prediction of real system behavior.

Keywords: derivative, mathematical modeling, rate of change, optimization, real processes.

Вступ

У сучасній науці та техніці значну роль відіграє аналіз процесів, що змінюються в часі або просторі. Такі процеси виникають у фізиці, економіці, біології, технічних системах та повсякденній діяльності людини. Для опису швидкості зміни величин, визначення характеру їх розвитку та прогнозування поведінки систем широко застосовуються методи математичного аналізу, зокрема похідна функції.

Похідна є фундаментальним поняттям вищої математики, яке дозволяє кількісно оцінити миттєву швидкість зміни однієї величини відносно іншої. Вона має чіткий геометричний, фізичний та економічний зміст і використовується для моделювання руху тіл, аналізу зростання або спадання функцій, оптимізації процесів та прийняття ефективних рішень.

Метою роботи є дослідження похідної як математичного інструменту моделювання реальних процесів та аналіз її застосування для опису фізичних, економічних і прикладних задач.

Результати дослідження

У ході виконання роботи було досліджено можливості застосування похідної як основного інструменту математичного аналізу для моделювання реальних процесів, що змінюються в часі або просторі. Основну увагу приділено вивченню фізичного, геометричного та прикладного змісту похідної, а також аналізу її ролі у дослідженні динаміки різних систем.

З математичної точки зору похідна дозволяє оцінити швидкість зміни функції в кожній окремій точці, а з практичної - використовується для опису миттєвих характеристик процесів. Було встановлено, що значення похідної безпосередньо впливає на характер поведінки функції: додатні значення відповідають зростанню процесу, від'ємні - його спаданню, а нульові - можливій зміні режиму функціонування системи.

Одним із ключових прикладів застосування похідної є моделювання механічного руху. Нехай закон руху тіла задано функцією координати. У цьому випадку похідна першого порядку за часом визначає

швидкість руху тіла $v(t) = \frac{ds}{dt}$, а похідна другого порядку - прискорення - $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Крім фізичних процесів, у роботі було проаналізовано застосування похідної в економічних моделях, що використовуються для оцінювання ефективності діяльності підприємств електроенергетичної галузі. Нехай функція прибутку підприємства описується залежністю $P=P(q)$, де P – прибуток підприємства, q – обсяг виробництва електроенергії.

Похідна функції прибутку за обсягом виробництва $P'(q) = \frac{dP}{dq}$ визначає граничний прибуток, тобто зміну прибутку при незначній зміні обсягу виробництва. У контексті функціонування ринку добової електроенергії граничний прибуток відображає економічну доцільність збільшення або зменшення генерації в окремі години доби залежно від ринкової ціни електроенергії.

Особливу увагу було приділено дослідженню екстремумів функцій та їх ролі в оптимізаційних задачах. Встановлено, що використання похідної значно спрощує процес знаходження максимумів і мінімумів, що має практичне значення у задачах мінімізації витрат, оптимального розподілу ресурсів та підвищення продуктивності систем.

Додатково у ході дослідження було проаналізовано вплив характеру зміни аргументу на поведінку похідної та відповідно на динаміку реального процесу. Зокрема, встановлено, що нелінійні залежності призводять до нерівномірної зміни швидкості, що є типовим для більшості природних і технічних систем. На відміну від лінійних моделей, у яких швидкість залишається сталою, нелінійні функції дозволяють точніше описувати процеси прискорення, уповільнення та коливань.

Також було розглянуто вплив початкових умов на характер розвитку процесу. Показано, що навіть незначна зміна початкового значення функції або її похідної може призвести до суттєвих відмінностей у подальшій поведінці системи. Це має важливе значення для прогнозування реальних процесів, зокрема у фізиці, економіці та технічних застосуваннях.

Окрему увагу приділено інтерпретації похідної як інструменту аналізу стабільності процесів. Встановлено, що знак і величина похідної дозволяють оцінити тенденцію розвитку системи та своєчасно виявити критичні моменти, у яких можливе різке змінення режиму її функціонування.

Похідна широко застосовується для аналізу швидкості зміни температури, концентрації речовин, напруги в електричних колах та інших величин. У таких випадках похідна дозволяє оцінити інтенсивність процесу та передбачити його подальший розвиток за заданих умов.

Отримані результати показали, що похідна є універсальним математичним інструментом, який дозволяє переходити від опису статичних залежностей до аналізу динамічних процесів. Її застосування забезпечує глибше розуміння закономірностей функціонування реальних систем і створює основу для подальшого математичного моделювання та прогнозування.

Висновки

Встановлено, що похідна є ефективним і універсальним інструментом математичного моделювання реальних процесів. Вона дозволяє описувати швидкість і характер зміни фізичних, економічних та технічних величин, а також визначати оптимальні параметри функціонування систем.

Показано, що використання похідної дає змогу аналізувати рух тіл, процеси зростання та спадання, знаходити екстремальні значення функцій і прогнозувати поведінку систем за різних умов. Отримані результати підтверджують важливість похідної як одного з ключових понять вищої математики, що має значну практичну цінність.

Запропонований підхід може бути використаний у навчальному процесі, інженерних розрахунках, економічному аналізі та інших прикладних галузях, де необхідно досліджувати динаміку реальних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals, 7th Edition. 2012. 1392 с.
2. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J. Thomas' Calculus, 13th Edition. 2014. 1224 с.
3. Apostol T.M. Calculus, Volume 1, 2nd Edition. 1967. 666 с.
4. Zill D.G., Wright W.S. Advanced Engineering Mathematics, 5th Edition. 2014. 1088 с.
5. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition. 2011. 1280 с.
6. Chiang A.C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4th Edition. 2005. 704 с.

7. Вовк Л.В. Математичні засоби моделювання економічних процесів : навчальний посібник. Київ : Ліра-К. 2019. 256 с.
8. Скафа О.І., Діхтяренко О.В. Математичне моделювання та аналіз процесів і систем. Київ : НТУУ «КПІ». 2018. 198 с.
9. Бевз В.Г., Бевз Г.П. Математичний аналіз: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Освіта, 2016. 608 с.

Ілона Олександрівна Надтока - студентка групи 2кн-24б, факультет інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Артем В'ячеславович Тарковський - студент групи 2кн-24б, факультет інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** - д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Ilona O. Nadтока - student of group 2cs-24b, Faculty of Information Technology and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Artem V. Tarkovskyi - student of group 2cs-24b, Faculty of Information Technology and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com