

Чисельна стійкість алгоритмів лінійної алгебри в комп'ютерних системах

¹Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто проблему чисельної стійкості алгоритмів лінійної алгебри, що використовуються в комп'ютерних системах. Проаналізовано вплив обмеженої розрядності представлення чисел та накопичення похибок округлення на точність результатів обчислень. Проведено порівняльний аналіз поширених методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з точки зору їх чисельної стійкості. Запропоновано основні підходи до зменшення похибок та підвищення надійності чисельних обчислень у програмних і апаратних середовищах.

Ключові слова: чисельна стійкість, лінійна алгебра, похибки округлення, комп'ютерні обчислення, чисельні алгоритми, обумовленість.

Abstract

The paper addresses the problem of numerical stability of linear algebra algorithms used in computer systems. The influence of finite-precision arithmetic and rounding error accumulation on computational accuracy is analyzed. A comparative analysis of common methods for solving systems of linear algebraic equations from the standpoint of numerical stability is presented. Basic approaches to reducing numerical errors and improving the reliability of computational results in software and hardware environments are discussed.

Keywords: numerical stability, linear algebra, rounding errors, computer computations, numerical algorithms, conditioning.

Вступ

Алгоритми лінійної алгебри є фундаментальною складовою сучасних комп'ютерних систем і широко застосовуються в комп'ютерній графіці, машинному навчанні, обробці сигналів, криптографії та інженерному моделюванні. Незважаючи на математичну коректність багатьох алгоритмів, їх реалізація на цифрових обчислювальних пристроях супроводжується неминучими похибками, зумовленими обмеженою розрядністю представлення чисел з плаваючою комою.

Проблема чисельної стійкості полягає у здатності алгоритму забезпечувати малі відхилення результатів за наявності похибок вхідних даних або обчислень. Нестійкі алгоритми можуть призводити до значних спотворень результатів навіть за незначних похибок округлення. У зв'язку з цим аналіз чисельної стійкості алгоритмів лінійної алгебри є важливим завданням як для теоретичної інформатики, так і для практичної комп'ютерної інженерії.

Результати дослідження

Обмежена розрядність представлення чисел з плаваючою комою означає, що більшість дійсних чисел у комп'ютерних системах подається лише наближено. Унаслідок цього кожна арифметична операція супроводжується похибкою округлення, яка при багаторазових обчисленнях має властивість накопичуватися. Наприклад, при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням чисел одинарної точності (float32) похибки округлення можуть призводити до істотного спотворення результатів, особливо для погано обумовлених матриць. Таким чином, вплив обмеженої розрядності та накопичення похибок округлення є одним із ключових факторів, що визначає точність і надійність чисельних алгоритмів [1–2].

У комп'ютерних системах обчислення виконуються з використанням чисел з плаваючою комою, що відповідають стандарту IEEE 754. Таке представлення забезпечує ефективність обчислень, але водночас призводить до похибок округлення, які можуть накопичуватися при виконанні великої кількості арифметичних операцій [1].

Одним із ключових понять чисельного аналізу є обумовленість задачі, яка характеризує чутливість розв'язку до малих змін вхідних даних. Навіть добре спроектований алгоритм може давати неточні результати для погано обумовлених задач [2].

Для оцінки чисельної стійкості було проведено порівняльний аналіз поширених методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Відомо, що класичний метод Гауса без вибору головного елемента є нестійким у разі погано обумовлених матриць, тоді як використання часткового або повного вибору суттєво підвищує точність результатів [3].

Табл. 1. Порівняльна характеристика методів

Метод розв'язання	Тип чисел	Характер похибок	Чисельна стійкість
Метод Гауса (без вибору)	float32	Значне накопичення	Низька
Метод Гауса (частковий вибір)	float32	Помірні похибки	Середня
LU-розклад	float64	Низькі похибки	Висока
QR-розклад	float64	Мінімальні похибки	Дуже висока

Як показує аналіз, найбільш чисельно стійкими є алгоритми, що ґрунтуються на ортогональних перетвореннях, зокрема QR-розклад. Перевага QR-розкладу полягає в застосуванні ортогональних перетворень, які не погіршують обумовленість задачі та не підсилюють похибки округлення під час обчислень. Оскільки ортогональні матриці мають норму, що дорівнює одиниці, помилки, які виникають у процесі обчислень, не накопичуються та не підсилюються. Це забезпечує високу чисельну стійкість алгоритму навіть для погано обумовлених матриць, що робить QR-розклад одним із найбільш надійних методів у задачах лінійної алгебри, де критично важлива точність результатів [1–5].

Висновки

Чисельна стійкість алгоритмів лінійної алгебри є критично важливою характеристикою при їх використанні в комп'ютерних системах. Дослідження показало, що похибки округлення та обмежена розрядність представлення чисел можуть істотно впливати на точність результатів. Використання чисельно стійких алгоритмів і відповідних методів зменшення похибок дозволяє значно підвищити надійність обчислень. Отримані результати можуть бути використані при розробленні програмних та апаратних рішень, що потребують високої точності чисельних обчислень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Higham N. J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. — Philadelphia : SIAM, 2002. — 680 p.
2. Trefethen L. N., Bau D. Numerical Linear Algebra. — Philadelphia : SIAM, 1997. — 361 p.
3. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. — Baltimore : Johns Hopkins University Press, 2013. — 756 p.
4. Higham N. J., Mary T. A new approach to probabilistic rounding error analysis // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2020. — Vol. 42, No. 2. — P. A281–A306.
5. Demmel J., Grigori L., Hoemmen M., Langou J. Communication-optimal numerical linear algebra // Acta Numerica. — 2022. — Vol. 31. — P. 1–70.

Науковий керівник: **Бондаренко Злата Василівна** – кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Сірак Владислав Олегович – студент групи 1KI-25мс, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: vladsirak9@gmail.com

Supervisor: **Bondarenko Zlata V.** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Sirak Vladislav O. – student of group 1KI-25ms, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vladsirak9@gmail.com