

# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ТА ПЕРЕНАВЧАННЯ У МОДЕЛЯХ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

В цій роботі розглядається роль регуляризації, як одного з основних інструментів машинного навчання для боротьби з перенавчанням. Методики сучасної регуляризації дозволяють контролювати складність моделей, що сприяє їхній здатності до узагальнення. Ми проаналізуємо математичні механізми впливу таких технік, як L1 регуляризація та L2 регуляризація, випадання, рання зупинка та нормалізація ваг. Їх вплив на помилки навчання та тестування. Крім того, буде розглянуто сучасні математичні підходи до оцінювання регуляризованого ризику та визначення оптимального значення регуляризації в задачах класифікації та регресії.

**Ключові слова:** регуляризація, машинне навчання, перенавчання, випадання, рання зупинка, нормалізація ваг

## Abstract

This work examines the role of regularization as one of the key tools in machine learning for combating overfitting. Modern regularization techniques make it possible to control model complexity, which improves their generalization ability. We analyze the mathematical mechanisms behind the influence of techniques such as L1 regularization, L2 regularization, dropout, early stopping, and weight normalization, as well as their effect on training and testing errors. In addition, modern mathematical approaches to evaluating regularized risk and determining the optimal regularization value in classification and regression tasks are considered.

**Keywords:** regularization, machine learning, overfitting, dropout, early stopping, weight normalization

## Вступ

За останні роки відбувся стрімкий розвиток технологій в зв'язку з створенням штучного інтелекту. Його невід'ємною частиною є машинне навчання, яке дає можливість комп'ютерним системам автоматично навчатись з даних, знаходити закономірності та покращуватись без використання програмування.[1] Алгоритми такого навчання аналізують великі обсяги інформації, приймають рішення, які базуються на вхідних даних, та роблять прогнози. Проте, не зважаючи на те, що штучний інтелект швидко розвивається та навчається він має і суттєві недоліки. Одним з таких недоліків є перенавчання. Воно виникає, коли створена модель, яка відповідає навчальному набору даних настільки, що не може робити правильні прогнози на основі нових, запропонованих їй даних. Математично це проявляється у високій складності моделі та низьких значеннях функції втрат на тренувальному наборі, але високих на тестових або нових даних, а також з високою дисперсією моделі. [2]

Для того, щоб уникнути перенавчання є кілька ефективних методів:

1. Регуляризація
2. Випадання
3. Рання зупинка

Математичний аналіз регуляризації у машинному навчанні базується на додаванні до функції втрат моделі штрафного терміну, який контролює складність моделі, запобігаючи перенавчанню.

Регуляризація в машинному навчанні — це сукупність методів, які допомагають уникнути перенавчання моделі, обмежуючи її складність. Без обмежень складності функціонального простору, в якому проводиться пошук, модель може бути навчена так, щоб відповідна їй функція проходила через кожен точку наявних даних  $x_i$ . Але якщо значення  $x_i$  містять шум, то модель може страждати від перенавчання і видавати погані значення очікуваних помилок. Регуляризація робить модель менш чутливою до шуму у навчальних даних, сприяючи кращій здатності узагальнювати нові дані. Основний принцип регуляризації полягає у додаванні до функції втрат додаткового штрафного терміну, що «карає» за надмірно великі або складні параметри моделі.[3]

Існують основні типи регуляризації:

Регуляризація  $L_1$  (Lasso) — додає до функції втрат суму абсолютних значень ваг, що призводить до розрідження моделі, оскільки деякі ваги стають саме нулями. Це допомагає відбирати найбільш важливі ознаки.

Розглядаючи математично функцію втрат  $L$ , то штраф  $L_1$  регуляризації виражається як:

$$L_1 = \gamma \sum |w_i|$$

де  $w_i$  — вага моделі,  $\gamma$  — гіперпараметр, який контролює силу регуляризації

Регуляризація  $L_2$  (Ridge) — додає суму квадратів ваг до функції втрат, що змушує ваги ставати меншими, але не обнуляє їх повністю, що забезпечує більш плавне згладжування параметрів моделі.

Якщо функція втрат моделі позначена як  $L$ , то штраф  $L_2$  регуляризації виражається як:

$$L_2 = \gamma \sum w_i^2$$

де  $w_i$  — вага моделі,  $\gamma$  — гіперпараметр, який контролює силу регуляризації

Гіперпараметр або коефіцієнт регуляризації  $\gamma$  у  $L_1$  та  $L_2$  регуляризаціях зазвичай знаходиться за допомогою кросвалідації.

Наступним методом для боротьби з перенавчанням є випадання або dropout. Він випадково «вимикає» частину нейронів під час тренування. Математично це розглядається як множинне навчання підмножини різних моделей. Випадання знижує залежність моделі від конкретних ваг, збільшуючи помилки навчання, але суттєво знижуючи помилки тестування, так як модель стає більш стійкою до шуму.

З математичної точки зору, випадання описується як процес Бернуллі, тобто для кожного нейрона вводиться бінарна випадкова змінна з параметром  $p$ , яка визначає, чи нейрон активний. Загальна кількість активних нейронів у шарі приблизно дорівнює  $n(1-p)$ , де  $n$  — число нейронів, а  $p$  — вимкнення нейрона.[4] Такий підхід зменшує кореляцію між нейронами, що ускладнює моделі надмірно підлаштовуватись під навчальні дані і тим самим знижує перенавчання.

Останнім основним методом запобігання перенавчанню є рання зупинка. Вона полягає в припиненні тренування, як тільки помилка на валідаційному наборі починає зростати. Тут не передбачається обчислення складності, наприклад, можна завершити навчання, як тільки крива втрат для набору даних для перевірки починає зростати, тобто її нахил стає позитивним.

З точки зору математичного аналізу, навчання моделі можна розглядати як ітеративний процес мінімізації функції втрат  $L(w)$ , де  $w$  — параметри моделі, за допомогою алгоритмів, таких як градієнтний спуск. При тривалому навчанні модель починає точніше адаптовуватись до навчальних даних, але з часом зростає розбіжність між помилками на тренувальних і валідаційних даних, що є ознакою перенавчання.[5]

Рання зупинка вводить умову припинення оптимізації при досягненні мінімуму помилки на валідації, фактично вибираючи параметри  $w$  не в останній ітерації навчання, а у проміжку, де функція втрат на валідаційних даних мінімальна. Це математично еквівалентно обмеженню складності моделі, мінімізуючи ризик узгодження з шумом навчальних даних.

## Висновок

Проаналізувавши процес перенавчання та процес регуляризації в даній роботі можна побачити, що ні один з розглянутих методів не реалізовується без математичного аналізу. Математичні механізми цих різних методів у сукупності забезпечують зниження помилок тестування через зменшення перенавчання, одночасно підтримуючи низькі помилки навчання. Аналіз регуляризованого ризику і оптимального вибору параметрів є важливою частиною сучасних підходів у задачах класифікації та регресії, що підвищує ефективність і надійність моделей машинного навчання.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Машинне навчання: що це таке, як працює і для чого використовується. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://goit.global/ua/articles/mashynne-navchannia-shcho-tse-take-ia-k-pratsiuie-i-dlia-choho-vykorystovuietsia/> (дата звернення: 25.11.2025).
2. Поняття машинного навчання. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://developers.google.com/machine-learning/crash-course/overfitting/overfitting?hl=uk> (дата звернення: 25.11.2025).
3. Надмірне навчання: регуляризація. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://developers.google.com/machine-learning/crash-course/overfitting/regularization?hl=uk> (дата звернення: 25.11.2025).
4. Виключення (нейронні мережі). [Електронний ресурс] – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F\\_\(%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%96\\_%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B6%D1%96\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_(%D0%BD%D0%B5%D0%B9%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%96_%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B6%D1%96)) (дата звернення: 25.11.2025).
5. Для чого потрібен математичний аналіз в машинному навчанні. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://mmf.com.ua/en/aren/2017> (дата звернення: 25.11.2025).

**Бусигіна Вероніка Павлівна** – студентка групи ІПКТ-24б, кафедра комп'ютерних наук, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця, e-mail: [veronikabysygina@gmail.com](mailto:veronikabysygina@gmail.com)

**Busyhina Veronika Pavlivna** – student of ІПКТ-24b group, Department of Computer Science, Faculty of Intelligent Information Technology and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [veronikabysygina@gmail.com](mailto:veronikabysygina@gmail.com)