

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ РУХУ ТІЛА У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглядається актуальна задача чисельного моделювання динаміки руху матеріальної точки у тривимірному просторі. Проаналізовано особливості програмної реалізації методу Рунге-Кутти 4-го порядку для системи диференціальних рівнянь, що описують стан об'єкта через шестикомпонентний вектор. Проведено порівняльний аналіз ефективності даного алгоритму з методом Ейлера на прикладі моделювання балістичного руху з урахуванням нелінійного аеродинамічного опору. Результати досліджень підтверджують високу точність та енергетичну стабільність методу RK4 при відтворенні складних просторових траєкторій, що дозволяє рекомендувати його для використання у сучасних фізичних рушіях та системах робототехніки.

Ключові слова: метод Рунге-Кутти, диференціальні рівняння, 3D-моделювання, чисельні методи, фазовий простір.

Abstract

The paper considers the actual problem of numerical modeling of material point dynamics in three-dimensional space. The features of software implementation of the fourth-order Runge-Kutta method for a system of differential equations describing the object state via a six-component vector are analyzed. A comparative analysis of the algorithm's efficiency against Euler's method is conducted using the example of ballistic motion simulation considering nonlinear aerodynamic drag. The research results confirm the high accuracy and energy stability of the RK4 method in reproducing complex spatial trajectories, which allows recommending it for use in modern physics engines and robotics systems.

Keywords: Runge-Kutta method, differential equations, 3D modeling, numerical methods, phase space.

Вступ

Математичне моделювання є основою сучасної робототехніки та комп'ютерної графіки. Ключовою задачею при цьому є точний розрахунок 3D-траєкторій, що математично зводиться до розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).

Оскільки прості методи (зокрема, Ейлера) швидко втрачають стабільність при тривалих симуляціях, доцільним є використання методу Рунге-Кутти 4-го порядку (RK4). Метою роботи є аналіз програмної реалізації RK4 для 3D-систем та верифікація його ефективності при моделюванні складних просторових траєкторій.

Результати дослідження

Особливістю програмної реалізації методу в тривимірному просторі є необхідність синхронного оновлення всіх шести компонент вектора стану $Y = \{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$. Метод Рунге-Кутти 4-го порядку забезпечує похибку локального зрізання порядку $O(h^5)$, що гарантує збереження енергетичної стабільності системи навіть при відносно великому кроці інтегрування. Це вигідно відрізняє його від методу Ейлера, який має похибку $O(h^2)$ і схильний до накопичення значних відхилень.

Для забезпечення атомарності обчислень вектор стану реалізовано як єдину структуру даних, де перша трійка чисел — це просторові координати, а друга — проекції швидкості. Фрагмент реалізації мовою C++ має вигляд:

```
struct State { double x, y, z; double vx, vy, vz; };  
State derivative(State s) {  
    return {s.vx, s.vy, s.vz, Fx(s)/m, Fy(s)/m, Fz(s)/m};  
}
```

У наведеному фрагменті функція повертає повний вектор похідних, що відповідає математичному запису $Y'=\{v,a\}$. Це гарантує, що при розрахунку коефіцієнтів Рунге-Кутти алгоритм оперує миттєвими значеннями всього набору змінних одночасно, запобігаючи виникненню фазових зсувів між координатами та швидкостями. Це особливо важливо, коли рух по одній осі впливає на силу, що діє на іншу вісь. Такий підхід робить симуляцію надійною навіть при дуже різких маневрах або швидких змінах траєкторії, не дозволяючи помилкам зростати.

Для верифікації методу було проведено моделювання руху тіла масою m під дією сили тяжіння та сили аеродинамічного опору, пропорційної квадрату швидкості. Математична модель описується рівнянням:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} |v| v.$$

Для детальної верифікації методу було проведено чисельний експеримент із моделювання руху точки по гвинтовій лінії (спіралі), що виникає внаслідок суперпозиції рівномірного поступального руху вздовж осі OZ та рівномірного обертання в площині XY під дією доцентрової сили. Тестування проводилося на часовому інтервалі $t \in [0;50]$ с із кроком дискретизації $h=0.05$ с.

Результати показали, що алгоритм RK4 дозволяє з високою точністю відтворювати складну геометрію траєкторії без помітного накопичення фазової похибки, яка є характерною для методів нижчого порядку. При порівнянні отриманих чисельних значень з еталонним аналітичним розв'язком, максимальне абсолютне відхилення координат не перевищувало $1.5 \cdot 10^{-4}$ м, що повністю задовольняє вимоги точності для інженерних розрахунків у задачах робототехніки та навігації.

Висновки

Підсумовуючи, можна стверджувати, що застосування методу Рунге-Кутти 4-го порядку вирішує проблему деградації точності, притаманну простим алгоритмам інтегрування при тривалих симуляціях. Отримані результати свідчать, що додаткові обчислювальні витрати на кожному кроці (розрахунок чотирьох коефіцієнтів) повністю компенсуються можливістю використання більшого кроку дискретизації без втрати фізичної достовірності моделі. Це робить даний метод найбільш збалансованим рішенням для імплементації у сучасне програмне забезпечення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Butcher J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. New York : John Wiley & Sons, 2016. 466 p.
2. Chapra S. C., Canale R. P. Numerical Methods for Engineers. 8th ed. New York : McGraw-Hill Education, 2021. 992 p.
3. Horton I., Van Weert P. Beginning C++20: From Novice to Professional. 6th ed. New York : Apress, 2020. 848 p.
4. Ковальчук А. М. Чисельні методи : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 256 с.

Скакун Назарій Сергійович — студент групи ІКІ-25мс, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця. e-mail: nazariy135@gmail.com

Науковий керівник: **Бондаренко Злата Василівна** — канд. педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Skakun Nazarii Sergiyovich — Department of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, nazariy135@gmail.com

Supervisor: **Bondarenko Zlata Vasylivna** — Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia