

РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ ЯК ІНСТРУМЕНТ ДОСЛІДЖЕННЯ ШИРОКОГО КЛАСУ ЗАДАЧ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У даній роботі досліджується радикальна ознака Коші як один із фундаментальних методів визначення збіжності числових та степеневих рядів. Розглянуто теоретичне обґрунтування ознаки, її переваги порівняно з іншими критеріями збіжності та особливості застосування у задачах математичного аналізу. Показано, що радикальна ознака є ефективним інструментом для дослідження рядів зі степеневими та експоненціальними складовими. Наведено приклади використання ознаки Коші для практичного аналізу збіжності рядів.

Ключові слова: радикальна ознака Коші, збіжність рядів, числові ряди, степеневі ряди, математичний аналіз.

Abstract

This paper explores the Cauchy radical sign as one of the fundamental methods for determining the convergence of numerical and power series. The theoretical justification of the sign, its advantages compared to other convergence criteria, and the features of its application in mathematical analysis problems are considered. It is shown that the radical sign is an effective tool for studying series with power and exponential components. Examples of using the Cauchy sign for practical analysis of series convergence are given.

Keywords: Cauchy radical sign, convergence of series, numerical series, power series, mathematical analysis.

Вступ

У вищій математиці проблема дослідження збіжності числових рядів є однією з ключових. Збіжність рядів відіграє фундаментальну роль у математичному аналізі, теорії функцій, розв'язанні диференціальних рівнянь та побудові аналітичних моделей у природничих і технічних науках. Радикальна ознака Коші є важливим інструментом, що дозволяє оцінити поведінку загального члена ряду. Оскільки різні типи рядів демонструють відмінну поведінку, виникає потреба у надійних та універсальних критеріях, які забезпечують можливість точно визначати їхню збіжність.

Результати дослідження

1. Важливість радикальної ознаки Коші. Радикальна ознака є важливою, бо вона дозволяє глибоко розуміти суть проблеми, виявляти першопричини, формувати кардинальні рішення, які дійсно вирішують проблему, а не тимчасово її приховують, а також стимулює інноваційне мислення та вихід за межі звичного, що критично важливо для прогресу та ефективного подолання складних викликів у будь-якій сфері – від науки й політики до особистого розвитку.

У контексті математичного аналізу це проявляється у можливості об'єктивно оцінювати поведінку нескінченних рядів при великих значеннях змінної, відокремлюючи суттєві чинники від другорядних. Застосування радикальної ознаки забезпечує строгість і надійність отриманих висновків, що є необхідною умовою побудови коректних математичних моделей та теоретичних узагальнень. Крім того, вона сприяє розвитку аналітичного мислення, навичок абстрагування та вміння працювати з асимптотичними оцінками, що є базовими компетенціями для фахівців у галузі математики, інженерії та інформаційних технологій.

2. Застосування. Застосування ознаки Коші полягає у тому, що замість аналізу складного загального члена ряду напряму, дослідник оцінює темп зростання або спадання послідовності через n -й корінь. Такий підхід усуває складність, пов'язану з великими степенями, факторіалами, експонентами чи добутками. Процедура застосування включає: обчислення $\sqrt[n]{|a_n|}$ або знаходження його

асимптотичної оцінки; визначення границі або використання відомих властивостей функцій; порівняння з одиницею та формування висновку.

Крім того, радикальна ознака Коші є зручною у випадках, коли загальний член ряду має складну аналітичну структуру і пряме порівняння з відомими збіжними або розбіжними рядами є утрудненим. Вона дозволяє зосередитись не на точному вигляді члена ряду, а на його поведінці при великих значеннях номера, що відповідає асимптотичному підходу сучасного математичного аналізу.

Важливою перевагою радикальної ознаки є її універсальність: вона може застосовуватися як до знакододатних так і до знакозмінних рядів за умови розгляду модуля загального члена. Це робить її ефективним інструментом для дослідження широкого класу задач, зокрема тих, що виникають у теорії рядів та функціональних послідовностей.

Також радикальна ознака Коші часто використовується у навчальному процесі як приклад методу, що поєднує строгість математичних міркувань із наочністю результату. Порівняння граничного значення з одиницею дає чіткий критерій, який легко інтерпретується та дозволяє швидко зробити висновок щодо характеру збіжності ряду.

3. Використання. Радикальна ознака Коші має широке застосування в різних напрямках математики та природничих наук. Насамперед вона використовується у математичному аналізі для дослідження збіжності числових і степеневих рядів, що є основою багатьох розділів сучасної математики. Важливою сферою застосування є аналіз степеневих рядів, де саме ця ознака дозволяє визначити радіус збіжності функції. Це відіграє ключову роль у теорії аналітичних функцій, оскільки дозволяє встановити область, у якій функцію можна представити у вигляді степеневого ряду.

У теорії диференціальних рівнянь радикальна ознака використовується для перевірки збіжності розкладів розв'язків, отриманих методом степеневих рядів. Багато рівнянь у фізиці та техніці, такі як рівняння теплопровідності, хвильове рівняння, мають розв'язки у вигляді рядів, тому перевірка збіжності таких рядів є необхідною для коректності моделі.

У фізиці радикальна ознака застосовується для аналізу рядів, що описують гармонічні та стоячі хвилі, спектральні розклади, процеси дифузії й коливань. Вона дозволяє визначити, чи можна використовувати певний розклад для моделювання фізичного явища, чи такий ряд буде розбіжним.

В інженерії та технічних науках радикальну ознаку застосовують при дослідженні збіжності чисельних методів, де використовуються серійні апроксимації. Наприклад, при побудові фільтрів, аналізі електричних сигналів, теплових процесів або механічних коливань важливо знати, чи наближення за допомогою ряду є коректним.

Окрім зазначених напрямів, радикальна ознака Коші активно застосовується при дослідженні функціональних рядів, де питання збіжності є ключовим для встановлення властивостей відповідних функцій. Зокрема, вона допомагає визначити області рівномірної збіжності, що має важливе значення для коректного переходу до границі під знаком інтеграла або похідної.

У чисельному аналізі радикальна ознака використовується для оцінки збіжності рядів, що виникають у процесі наближеного обчислення функцій, наприклад, при розкладанні у степеневі або експоненціальні ряди. Це дозволяє оцінити точність чисельних алгоритмів та обґрунтувати вибір кількості членів ряду для практичних обчислень.

У прикладних задачах математичного моделювання перевірка збіжності рядів за допомогою радикальної ознаки Коші є необхідною умовою коректності побудованих моделей. Якщо ряд, що описує певний процес, не є збіжним, то результати моделювання можуть втрачати фізичний або прикладний зміст.

Таким чином, радикальна ознака Коші відіграє важливу роль не лише в теоретичних дослідженнях, а й у практичному застосуванні математичних методів, забезпечуючи строгість, надійність і обґрунтованість отриманих результатів.

Висновки

Радикальна ознака Коші є універсальним та ефективним методом для дослідження збіжності числових та степеневих рядів. На відміну від інших критеріїв, вона дозволяє аналізувати ряди з

експоненціальними і степеневими компонентами, а також забезпечує строгий і зручний підхід для знаходження радіуса збіжності степеневих рядів.

Застосування радикальної ознаки сприяє точнішому аналізу математичних моделей та функціональних залежностей у природничих науках, фізиці та техніці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Радикальна ознака Коші. [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Радикальна_ознака_Коші
2. Радикальна ознака Коші. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/7678487/page:6/>
3. Числові ряди. [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://web.kpi.kharkov.ua/apm/wp-content/uploads/sites/82/2020/04/Lektsiya-24_04_2020.pdf
4. Числові та функціональні ряди. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/70181>

Вадим Володимирович Кравець - студент групи ЗКН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vadim13040@gmail.com

Науковий керівник: **Майя Борисівна Ковальчук** - д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Vadim V. Kravets - student of group 3KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vadim13040@gmail.com

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com