

ДЕЯКІ ІСТОРИЧНІ ТА СУЧАСНІ АСПЕКТИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У цій роботі досліджено практичне застосування теорії функцій комплексної змінної в різних галузях науки і техніки. Розглянуто історію виникнення та розвитку комплексного аналізу від перших спроб італійських математиків шістнадцятого століття до формування завершеної математичної дисципліни наприкінці дев'ятнадцятого століття. Особлива увага приділена застосуванню методів комплексного аналізу в гідродинаміці та аеродинаміці для розрахунку течій рідин та газів та в електротехніці для аналізу кіл змінного струму та перехідних процесів. Показано, як математичний апарат комплексних чисел дозволяє розв'язувати складні інженерні та фізичні задачі, які важко або неможливо вирішити іншими методами.

Ключові слова: функції комплексної змінної, комплексний аналіз, гідродинаміка, аеродинаміка, електротехніка.

Abstract

This paper investigates the practical applications of complex variable function theory in various fields of science and engineering. The history of the origin and development of complex analysis is examined, from the first attempts by Italian mathematicians of the sixteenth century to the formation of a complete mathematical discipline at the end of the nineteenth century. Special attention is given to the application of complex analysis methods in hydrodynamics and aerodynamics for calculating fluid and gas flows, and in electrical engineering for analyzing alternating current circuits and transient processes. It is shown how the mathematical apparatus of complex numbers allows solving complex engineering and physical problems that are difficult or impossible to solve by other methods.

Keywords: functions of a complex variable, complex analysis, hydrodynamics, aerodynamics, electrical engineering.

Вступ

Теорія функцій комплексної змінної є однією з найбільш практично значущих областей сучасної математики. На перший погляд може здатися дивним, що числа, які включають уявну одиницю, можуть мати реальне застосування в інженерії та фізиці. Однак саме комплексні числа та функції від них виявилися незамінним інструментом для розв'язання багатьох практичних задач, з якими стикаються інженери, фізики та дослідники щодня. Комплексні числа з'явилися як математичний трюк для розв'язання алгебраїчних рівнянь, але швидко виявилось, що вони мають набагато глибший зміст. Завдяки працям Ейлера, Коші, Рімана та Вейерштраса комплексні числа отримали не лише математичну строгість, але й геометричну інтерпретацію, яка відкрила шлях до їх широкого практичного застосування. Сьогодні методи комплексного аналізу дозволяють обчислювати течії рідин та газів навколо крил літаків та корпусів кораблів, аналізувати електричні кола змінного струму в енергетичних мережах, розраховувати поведінку складних технічних систем. Особливість комплексного аналізу полягає в тому, що він часто дає простіші та елегантніші розв'язки порівняно з методами, що використовують лише дійсні числа.

Результати дослідження

1. Основні етапи історії розвитку комплексного аналізу.

1.1. Виникнення комплексних чисел у XVI столітті. Історія комплексних чисел починається в шістнадцятому столітті, коли італійські математики Джероламо Кардано та Нікколо Тарталья намагалися знайти загальні формули для розв'язання кубічних рівнянь. Вони виявили, що іноді для отримання цілком реальних розв'язків потрібно проводити проміжні обчислення з квадратними коренями від від'ємних чисел. Спочатку такі числа вважались лише формальним математичним

прийомом без реального змісту, і сам Кардано називав їх "витонченими й марними". Математики того часу не могли зрозуміти, як можна взяти корінь з від'ємного числа, адже будь-яке число при множенні само на себе дає додатний результат. Проте ці дивні числа працювали - з їх допомогою можна було отримати правильні відповіді, навіть якщо сам процес обчислення здавався безглуздом.

1.2 Скептичне ставлення та поступове прийняття. Протягом наступних століть математики поступово звикали до ідеї комплексних чисел, хоча ставлення до них залишалося обережним. Деякі вчені взагалі відмовлялися їх використовувати, вважаючи це шахрайством. Лише у XVII–XVIII століттях почали з'являтися перші спроби надати їм змістовну інтерпретацію.

1.3 Внесок Леонарда Ейлера та геометричне подання. Перший серйозний крок до визнання комплексних чисел зробив швейцарський математик Леонард Ейлер у XVIII столітті. Ейлер був одним з найпродуктивніших математиків в історії і зробив фундаментальні внески в багато областей науки. Саме він запровадив позначення для уявної одиниці та встановив знамениту формулу, яка пов'язує експоненційну функцію з тригонометричними функціями. Ейлер показав, що комплексні числа можна зображати на площині, де горизонтальна вісь відповідає дійсній частині, а вертикальна - уявній. Це геометричне представлення виявилось надзвичайно плідним і відкрило шлях до подальшого розвитку теорії. Раптом стало зрозуміло, що комплексні числа мають чітку геометричну інтерпретацію як точки на площині.

1.4 Геометричні інтерпретації Весселя та Аргана. Незалежно від Ейлера, норвезький картограф Каспар Вессель та французький математик Жан-Робер Арган також розробили геометричні інтерпретації комплексних чисел. Арган особливо детально описав, як операції додавання та множення комплексних чисел можна розуміти геометрично. Додавання відповідає додаванню векторів на площині, а множення пов'язане з поворотами та розтягуваннями. Це надало комплексним числам інтуїтивного сенсу, який раніше бракував.

1.5 Заснування комплексного аналізу Огюстеном Коші. На початку дев'ятнадцятого століття французький математик Огюстен Луї Коші заклав фундамент сучасної теорії функцій комплексної змінної. Коші вперше чітко сформулював, що означає для функції бути аналітичною, тобто мати похідну в комплексному розумінні. Він ввів поняття аналітичної функції та довів свою знамениту інтегральну теорему, яка встановлює зв'язок між значеннями функції всередині деякої області та на її межі. Виявилось, що аналітичні функції мають вражаючі властивості, які кардинально відрізняють їх від звичайних функцій дійсної змінної.

1.6 Теорія лишків і практичні застосування. Коші також розробив теорію лишків - інструмент для обчислення складних інтегралів. Ідея полягає в тому, що якщо функція має особливі точки, де вона поводить себе нерегулярно, то інтеграл навколо цих точок можна виразити через спеціальні числа, які називаються лишками. Ця теорія виявилася неймовірно корисною для практичних застосувань і сьогодні широко використовується інженерами та фізиками.

1.7 Підходи Рімана і Вейерштраса. Подальший розвиток теорії у середині XIX століття пов'язаний з іменами Бернхарда Рімана та Карла Вейерштраса. Ріман підійшов до теорії з геометричної точки зору. Він ввів поняття ріманових поверхонь - абстрактних геометричних об'єктів, на яких багатозначні функції стають однозначними. Наприклад, функція квадратного кореня має дві гілки, і на звичайній площині важко працювати з обома гілками одночасно. Ріман показав, як побудувати спеціальну поверхню, на якій обидві гілки природно об'єднуються в одну функцію. Вейерштрас, навпаки, розвивав строго аналітичний підхід, базуючись на теорії степеневих рядів. Він вважав, що вся теорія повинна будуватися виключно на точних визначеннях та строгих доведеннях, без геометричної інтуїції. Вейерштрас систематично досліджував, як поведуться степеневі ряди, які функції можна представити такими рядами, і як працювати з функціями, які мають особливі точки. Обидва підходи виявилися надзвичайно важливими та взаємодоповнюючими, і сучасна теорія використовує ідеї обох цих великих математиків.

1.8 Завершення формування теорії та сучасне значення. До кінця дев'ятнадцятого століття теорія функцій комплексної змінної сформувалася як завершена математична дисципліна з глибокими внутрішніми зв'язками та широкими можливостями застосування. У двадцятому столітті вона стала незамінним інструментом у квантовій механіці, теорії відносності, ядерній фізиці та теорії поля. Також методи комплексного аналізу виявилися критично важливими для розвитку електротехніки, авіації, радіотехніки та багатьох інших технологій. Сьогодні практично неможливо уявити сучасну науку та інженерію без використання комплексних чисел та функцій комплексної змінної.

2. Використання комплексних чисел та функцій комплексної змінної в сучасній науці.

2.1 Застосування в теорії диференціальних рівнянь. Метод контурного інтегрування широко застосовується для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, при цьому застосування операційного перетворення Лапласа до вихідного диференціального рівняння дозволяє спростити його до алгебраїчного рівняння відносно зображення $F(p)$ шуканого розв'язку. Цей підхід виявляється особливо ефективним для рівнянь з розривними правими частинами, які характерні для аналізу імпульсних та перехідних процесів у різноманітних фізичних системах, зокрема в електротехніці при дослідженні перехідних процесів у електричних колах з комутацією або в механіці при моделюванні систем, що зазнають ударних навантажень. Аналогічні методи комплексного аналізу знаходять застосування і для розв'язання рівнянь з частинними похідними, наприклад, для рівняння теплопровідності або хвильового рівняння використовується інтегральне перетворення Фур'є за просторовими або часовими змінними, що зводить частинні похідні до звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких у просторі зображень потім перетворюються назад за допомогою оберненого перетворення Фур'є, що обчислюється з використанням теорії лишків та методів контурного інтегрування в комплексній площині.

2.2 Застосування в гідродинаміці та аеродинаміці. Одним з найбільш вражаючих застосувань комплексного аналізу є розрахунок течій рідин та газів. Коли рідина або газ обтікають якесь тіло, наприклад крило літака, корпус корабля чи лопать турбіни, виникає складна картина руху, яку потрібно вміти обчислювати для проектування ефективних конструкцій. Інженери повинні знати, який тиск діє на різні частини поверхні, яка виникає підйомна сила, наскільки великим буде опір руху. Виявилось, що для певного класу течій, які називаються потенціальними або ідеальними, вся інформація про рух може бути закодована в одній комплексній функції, яку називають комплексним потенціалом течії. Потенціальні течії - це течії, в яких рідина або газ не має внутрішнього тертя. Хоча реальні рідини завжди мають деяку в'язкість, для багатьох практичних задач нею можна знехтувати, особливо коли швидкість течії достатньо велика. Використання комплексного потенціалу надзвичайно спрощує розрахунки. Замість того, щоб окремо шукати швидкість течії в кожній точці простору та розв'язувати складну систему диференціальних рівнянь, достатньо знайти одну функцію комплексної змінної. З цієї функції автоматично отримуються всі характеристики течії: швидкість потоку, тиск на поверхню тіла, і навіть повні сили при обтіканні. Ще одним потужним інструментом є конформні відображення, які дозволяють перетворювати прості течії у складні. Для простих геометричних форм, таких як коло, течію обчислити досить легко. А от течію навколо реального профілю крила набагато складніше. Конформні відображення дозволяють математично перетворити коло в профіль крила таким чином, що проста течія перетворюється в складну, але при цьому зберігаються важливі властивості. Конформне відображення - це таке перетворення комплексної площини, яке зберігає кути між кривими. Для аналітичних функцій виконується чудова властивість: вони автоматично є конформними відображеннями в усіх точках, де їх похідна не дорівнює нулю. Це означає, що величезний клас функцій комплексної змінної можна використовувати для перетворення течій. Методи конформних відображень застосовуються при проектуванні лопатей турбін для гідроелектростанцій та теплових електростанцій, при оптимізації форми лопатей вітрових турбін. Хоча сучасні комп'ютери дозволяють проводити детальне числове моделювання течій, методи комплексного аналізу залишаються незамінними для швидких оцінок на початкових етапах проектування та для глибокого розуміння фізики процесів.

2.3 Застосування в електротехніці. В електротехніці комплексні числа стали стандартним інструментом для аналізу електричних кіл змінного струму. Коли в електричному колі протікає змінний струм, напруга та струм постійно змінюються в часі, зазвичай за синусоїдальним законом. Аналіз таких кіл за допомогою звичайних методів вимагає розв'язування складних диференціальних рівнянь, що є трудомістким та незручним для практичних розрахунків.

Застосування комплексних чисел дозволяє кардинально спростити цю задачу. Замість того, щоб працювати безпосередньо з синусоїдальними функціями часу, інженери переходять до комплексних амплітуд, які є постійними комплексними числами. При такому підході складні диференціальні рівняння перетворюються на прості алгебраїчні рівняння, які легко розв'язуються. Після знаходження розв'язку в комплексній формі можна легко повернутися до реальних значень струмів та напруг. Ключовим поняттям є комплексний імпеданс, який узагальнює поняття опору на випадок змінного струму. Для резисторів, котушок індуктивності та конденсаторів імпеданс має різну природу. Резистор чинить опір незалежно від частоти струму, завжди перетворюючи електричну енергію на тепло.

Індуктивність створює опір, що зростає з частотою. Конденсатор поводить себе протилежним чином - він краще пропускає високочастотні сигнали, а для постійного струму є нескінченним опором. Всі ці властивості елегантно описуються комплексними числами, де дійсна частина імпедансу відповідає активному опору, який розсіює енергію, а уявна частина - реактивному опору, який лише запасє енергію. Завдяки такому представленню можна застосовувати до кіл змінного струму ті самі правила, що й до кіл постійного струму - закон Ома, правила Кірхгофа, методи еквівалентних перетворень.

Використання комплексного аналізу особливо важливе при проектуванні електричних мереж, трансформаторів, електродвигунів та генераторів. Інженери можуть швидко розрахувати розподіл потужності в складних розгалужених мережах, які з'єднують електростанції зі споживачами. Вони можуть проаналізувати резонансні явища, які виникають, коли індуктивність та ємність у колі взаємно компенсують один одного. Це використовується у радіоприймачах для виділення потрібної станції, але може бути небезпечним у лініях електропередачі, викликаючи перенапруги. Комплексний аналіз дозволяє визначити коефіцієнт потужності - важливий параметр, який показує, наскільки ефективно електроенергія передається від джерела до споживача. Якщо коефіцієнт потужності низький, значна частина струму циркулює між джерелом і навантаженням, не виконуючи корисної роботи. Також комплексний аналіз використовується при дослідженні перехідних процесів у електричних колах - при вмиканні або вимиканні навантаження, при коротких замиканнях. За допомогою перетворення Лапласа, яке базується на методах комплексного аналізу, можна передбачити поведінку електричної системи в таких ситуаціях і спроектувати належний захист. Це критично важливо для забезпечення надійності та безпеки електропостачання.

У сучасній силовій електроніці, де використовуються напівпровідникові перетворювачі для керування електродвигунами та інверторами сонячних батарей, комплексний аналіз також відіграє важливу роль. Складні форми напруги та струму можна розкласти на суму синусоїд різних частот за допомогою перетворення Фур'є, і кожен складову проаналізувати окремо. Це дозволяє оптимізувати роботу перетворювачів та підвищити ефективність систем.

Висновки

Теорія функцій комплексної змінної пройшла довгий шлях від сумнівних "витончених і марних" чисел шістнадцятого століття до потужного математичного апарату з надзвичайно широким спектром застосувань у сучасній науці та техніці. Завдяки працям видатних математиків - Ейлера, Коші, Рімана та Вейєрштрасса - комплексні числа отримали строге математичне обґрунтування та геометричну інтерпретацію, що відкрило шлях до їх практичного використання. Особлива цінність методів комплексного аналізу полягає в їхній універсальності та міждисциплінарному характері: той самий математичний формалізм однаково ефективно застосовується для розрахунку течій рідини та газу навколо крил літаків і корпусів кораблів, для аналізу перехідних процесів у електричних колах та проектування енергетичних мереж, для розв'язання складних диференціальних рівнянь, що свідчить про глибину єдності математичних структур та їхнє фундаментальне значення для опису різноманітних природних явищ. Незважаючи на те, що теорія функцій комплексної змінної може видаватися абстрактною, її реальна цінність для сучасної науки та інженерії важко переоцінити, оскільки інженери та прикладні математики по всьому світу щоденно використовують методи комплексного аналізу для розв'язання конкретних практичних задач, від проектування турбін і вітрових електростанцій до розрахунку електричних мереж та оптимізації технічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мельник Т.А. Комплексний аналіз – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/Melnyk_Complex_Analysis-2015.pdf
2. Швець В. Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної. - 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://card-file.ontu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/5a2c131e_511141649_fe6aa51aa8_c_d6d/content
3. Ahlfors Lars Complex Analysis - 1979. – Режим доступу до ресурсу: https://mccuan.math.gatech.edu/courses/6321/lars-ahlfors-complex-analysis-third-edition-mcgraw-hill-science_engineering_math-1979.pdf

Владислав Олександрович Зозуля – студент групи 4КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: adunadan12@gmail.com.

Дмитро Сергійович Богачук – студент групи 4КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: bogatchucdmitro2007@gmail.com.

Науковий керівник: **Майя Борисівна Ковальчук** - д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Vladyslav O. Zozulya – student of group 4KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: adunadan12@gmail.com.

Dmytro S. Bogachuk – student of group 4KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: bogatchucdmitro2007@gmail.com.

Supervisor: **Maya B. Kovalchuk** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95 e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com