

ДЕФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ В КОМП'ЮТЕРНОМУ ЗОРІ ТА ГРАФІЦІ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

Досліджено застосування методів диференціальної геометрії у комп'ютерному зорі та графіці. Проаналізовано використання кривини поверхні, геодезичних ліній та квадратичних форм для задач 3D-реконструкції, сегментації, анімації та рендерингу. Запропоновано підхід до інтеграції геометричного апарату в обчислювальні конвеєри для підвищення точності алгоритмів.

Ключові слова: диференціальна геометрія, комп'ютерне зорі, комп'ютерна графіка, кривина, геодезичні.

Abstract

The application of differential geometry methods in computer vision and graphics is investigated. The use of surface curvature, geodesic lines, and quadratic forms for 3D reconstruction, segmentation, animation, and rendering tasks is analyzed. An approach to integrating geometric tools into computational pipelines to improve algorithm accuracy is proposed.

Keywords: differential geometry, computer vision, computer graphics, curvature, geodesics.

Вступ

Комп'ютерний зір та графіка потребують точного математичного опису форми об'єктів. Диференціальна геометрія надає апарат для інваріантного аналізу поверхонь, що є критично важливим для розробки стабільних алгоритмів.

Мета роботи систематизувати зв'язок між ключовими поняттями диференціальної геометрії та практичними задачами Computer Vision CV, Computers Graphics CG.

Результати дослідження

Основний апарат диференціальної геометрії базується на трьох фундаментальних концепціях, кожна з яких знаходить наочне відображення у графічних ілюстраціях. Першою є метрика поверхні, формалізована через першу квадратичну форму з коефіцієнтами E, F, G.

Вона математично описує внутрішню геометрію поверхні, визначаючи, як обчислюються довжини кривих та кути між ними прямо на цій поверхні, незалежно від її викривленості в просторі. Цю абстрактну концепцію можна візуалізувати. На рис. 1 продемонстровано, як перша квадратична форма визначає відстані та кути на кривій поверхні на прикладі сферичної сітки.

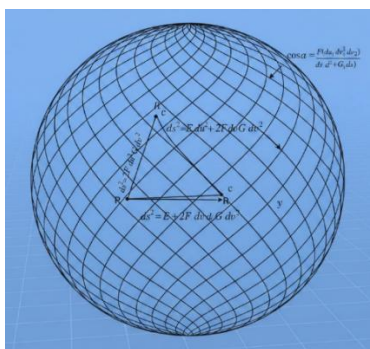


Рис. 1. Квадратична форма визначення відстані та кута на кривій поверхні

Другою ключовою концепцією є кривина, що кількісно вимірює відхилення поверхні від площини. Її головні інваріанти – гаусова K та середня H кривина – класифікують точки поверхні. На рис. 2 продемонстровано три фундаментальні типи точок: еліптичні (додатна кривина, як на сфері), гіперболічні (від'ємна, сідлова поверхня) та параболічні (нульова, циліндр).

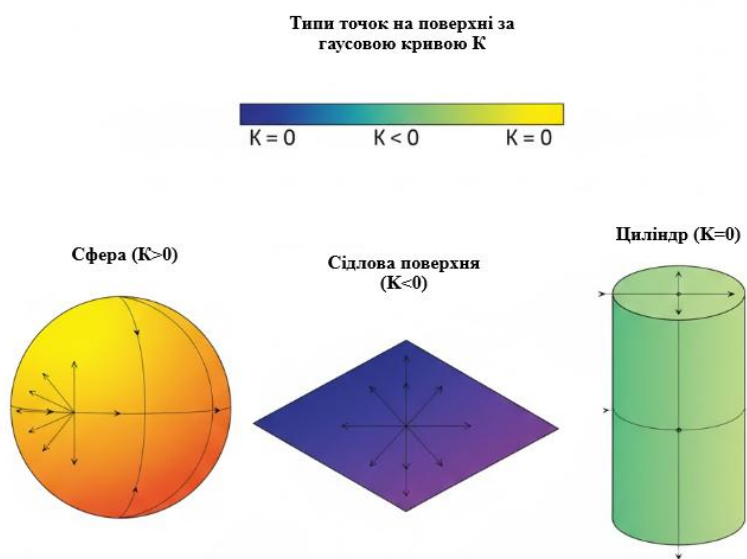


Рис. 2. Демонстрація типів точок на поверхні

Третім основним поняттям є геодезичні лінії – узагальнення прямих на викривлених поверхнях, що представляють собою найкоротші шляхи. На рис.

3 продемонстровано концепцію на прикладі складного 3D-об'єкта, де геодезична лінія виділена кольором, демонструючи оптимальний маршрут між двома точками, що лежить цілком на поверхні.

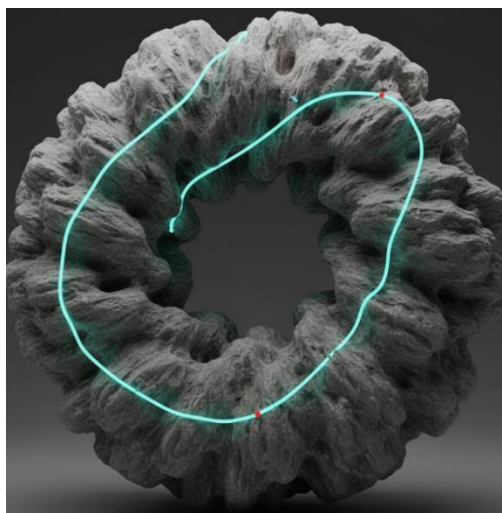


Рис. 3. Демонстрація геодезичної лінії на поверхні складного 3D – об'єкта

Ці математичні концепції безпосередньо втілюються у вирішенні прикладних задач. У комп'ютерному зорі аналіз кривини є основою для 3D-реконструкції.

На рис. 4 продемонстровано цей процес: з розрідженої хмари точок (ліворуч) відновлюється цілісна гладка поверхня (праворуч) завдяки алгоритмам, що використовують інформацію про нормалі та кривину.

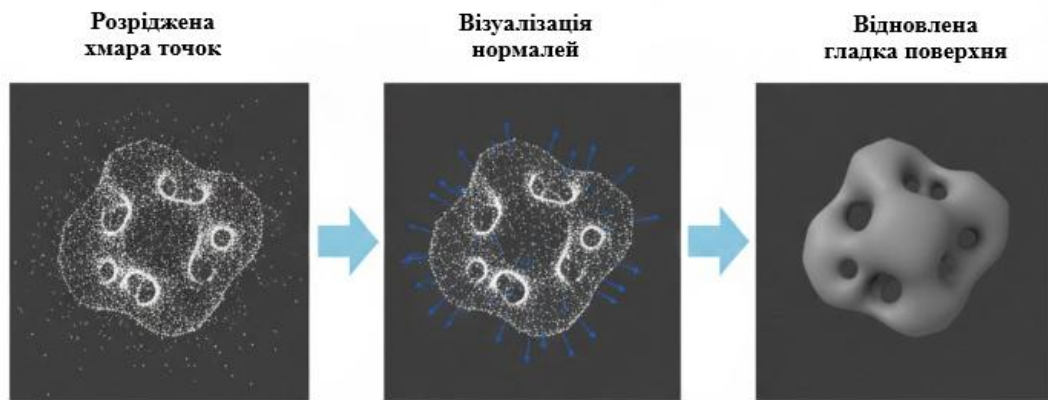


Рис. 4. Процес розрідження та відновлення гладкості з використанням інформації про нормалі та криві.

У комп'ютерній графіці якісне текстурзування неможливе без UV-розгортки – "розкривання" 3D-сітки на 2D-площину. Якість цього процесу безпосередньо залежить від мінімізації геометричних спотворень. На рис. 5 порівнюються погана (зі спотвореннями) та якісна (майже ізометрична) розгортки для 3D-моделі голови.

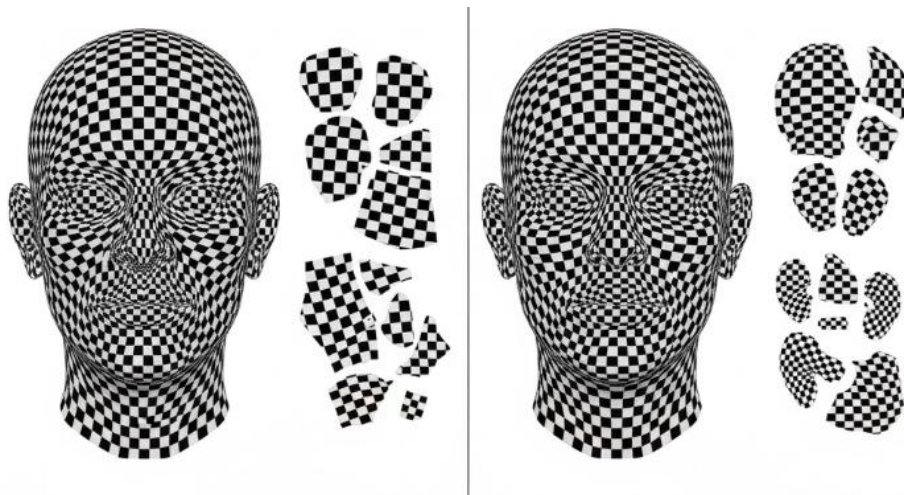


Рис. 5. Демонстрація порівняння UV – розгортки

У рендерингу фізична коректність залежить від геометрії. Ефект підповерхневого розсіювання, що надає матеріалам реалізму демонструє рисунок 6. На ньому порівнюються два результати рендерингу сфери: звичайний (ліворуч) та з урахуванням підповерхневого розсіювання (праворуч).



Рис. 6. Порівняння рендерингу з ефектом та без ефекту

Практичною реалізацією геометричних концепцій є алгоритм обчислення дискретної гаусової кривини на полігональній сітці за формулою.

$$K_i = \frac{1}{A_i} (2\pi - \sum_{j \in N(i)} \theta_j) \quad (1)$$

Результат роботи такого алгоритму продемонстрований на рис. 7, де кольорова карта на моделі тору візуалізує розподіл кривини: теплі кольори (червоний, жовтий) позначають додатну кривину, холодні (синій) – від’ємну.

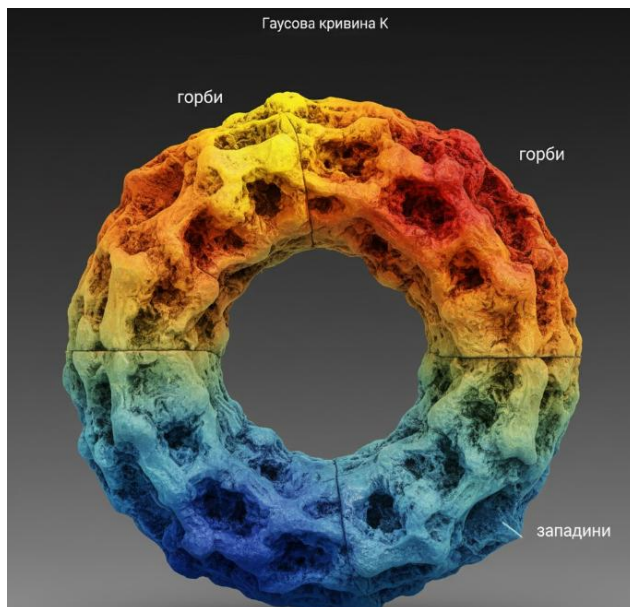


Рис. 7. Візуалізація обчислення гаусової кривини на модель тору

Таким чином, апарат диференціальної геометрії є фундаментальною мовою для алгоритмів комп’ютерного зору та графіки, що забезпечує точність, інваріантність та фізичну коректність. Перспективи полягають у розвитку методів дискретизації для складних сіток та інтеграції з глибинним навчанням для створення «геометрично обізнаного» штучного інтелекту.

Висновки

Проведений аналіз демонструє, що методи диференціальної геометрії не є лише абстрактним математичним апаратом, а становлять фундаментальну теоретичну основу для сучасних технологій комп’ютерного зору та графіки. Ключові поняття – метрика поверхні, кривина та геодезичні лінії – надають інструменти для точного опису форми, що є інваріантним до перетворень і фізично коректним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1.Crane, K., & Wardetzky, M. (2021). *A Glimpse into Discrete Differential Geometry*. Notices of the American Mathematical Society, 68(4), 566–579.
- 2.Solomon, J. (2021). *Numerical Algorithms: Methods for Computer Vision, Machine Learning, and Graphics*. CRC Press. 400 p.
- 3.Panozzo, D., & Diamanti, O. (2020). *Introduction to Geometry Processing: Differential Geometry for the Digital World*. SIGGRAPH Course Notes. 185 p.
- 4.Liu, Y., & Jacobson, A. (2022). *Modern Geometry Processing: With Python and C++*. Cambridge University Press. 320 p.
- 5.Bickel, B., & Bäcker, M. (Eds.). (2023). *Computational Design of Lightweight Structures: Modeling, Optimization, and Fabrication*. Springer. 290 p.
- 6.Zhong, J., & Boubekur, T. (2022). *Deep Learning for 3D Shape Analysis and Generation*. Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision, 14(3), 200–365.

Георгіян Євгеній Геннадійович – студент групи 1KI-25МС, факультет інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: zena2zoomcon2661@gmail.com

Науковий керівник: **Бондаренко Злата Василівна** – канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Georgian Yevhenii Hennadiiovych – student of group 1KI-25MS, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: zena2zoomcon2661@gmail.com

Scientific supervisor: **Bondarenko Zlata Vasylivna** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia