

ІНТЕРАКТИВНА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗА УЧАСТІ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У звіті надано вичерпний аналіз методології, програмної архітектури та практичної реалізації інтерактивної візуалізації нестационарних процесів теплопровідності з використанням методу скінченних різниць (МСР) у середовищі Python. Акцентовано увагу на глибокий розгляд інженерних аспектів розробки симуляційного програмного забезпечення. Зроблено висновок щодо ролі візуалізації як інструменту, що трансформує процес наукового пошуку та інженерного проектування.

Ключові слова: інтерактивність; візуалізація; рівняння теплопровідності; метод скінченних різниць; схема; стабільність схеми.

Abstract

The report provides a comprehensive analysis of the methodology, software architecture, and practical implementation of interactive visualization of non-stationary heat conduction processes using the finite difference method (FDM) in the Python environment. The focus is on a deep consideration of the engineering aspects of simulation software development. A conclusion is made regarding the role of visualization as a tool that transforms the process of scientific research and engineering design.

Keywords: interactivity; visualization; heat equation; finite differences method; scheme; scheme's stability.

Вступ

Рівняння теплопровідності[3] є однією з найбільш досліджуваних тем у фундаментальній математиці. Дане рівняння можна розглядати на Рімановому різноманітті, що потягує за собою його використання в геометрії, зокрема – спектральній геометрії. За допомогою інтегрування даного рівняння в диференціальну геометрію, було згодом доведено гіпотезу Пуанкаре в 2003 році Григорієм Перельманом.

Важливу роль рівняння теплопровідності відіграє в сфері прикладної математики. Наприклад, в теорії ймовірностей воно пов'язане з вивченням випадкового блукання і Броунівського руху через рівняння Фоккера-Планка. У фінансовій математиці рівняння Блека-Шоулза, що використовується для моделювання опціонів, а в квантовій механіці рівняння Шредінгера, яке описує зміну в просторі і в часі чистого стану, є варіантами даного рівняння, що розглядаються в так званому уявному часі. За допомогою нього можна виміряти теплопровідність у полімерах, зокрема, у гумі, а також в інших полімерних матеріалах, що представляють практичний інтерес; має своє застосування у мікрогідродинаміці.

Інтерактивна візуалізація стає невід'ємним компонентом дослідницького процесу, дозволяючи вченим та інженерам формувати інтуїтивне розуміння фізики явища. Можливість змінювати параметри системи (коефіцієнти дифузії, граничні умови, потужність джерел тощо) динамічно і миттєво спостерігати відгук системи радикально скорочує цикл перевірки гіпотез.

Результати дослідження

Розглядається одновимірний стрижень довжини L , теплоізований з обох і достатньо тонкий, щоб в будь-який момент часу температуру в усіх точках поперечного перерізу можна було вважати однаковою. Процес розповсюдження температури в стрижні описується функцією $u = u(x, t)$ яка представляє температуру в точці (перерізі) x у момент часу t .

В одновимірному випадку теплове рівняння, яке характеризує розповсюдження тепла в матеріалі з коефіцієнтом теплопровідності α із плином часу, описується наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Зрозуміло, що аналітичні методи розв'язків часто виявляються непридатними для використання в якості обчислювальних алгоритмів, зокрема для побудови градієнта зміни температури. Тому, на основі чисельних методів та з використанням методу скінченних різниць (або сіток)[2], можливо досягти високого рівня точності та передачу ключових аспектів фізичного процесу.

Нехай задана область Ω на площині Oxt з певною границею. В такому разі розглядається не континуум точок площини Oxt , а скінченна множина дискретних точок $P_{ij} = (x_i, t_j)$. Поділимо нашу область, задану нерівностями $0 \leq x \leq L$ та $0 \leq t \leq T$ на скінченну кількість прямокутників розмірністю $\Delta x \times \Delta t$, а розмірність всієї області складатиме $(n - 1) \times (m - 1)$, де n, m – кількість просторових та часових точок розбиття відповідно. Тоді, виразам з рівняння (1) будуть відповідати наступні різницеві формули[1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

Для досягнення стійкості схеми та уникнення експоненційного зростання розв'язків з плином часу, коефіцієнт $r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ не повинен перевищувати значення 0.5.

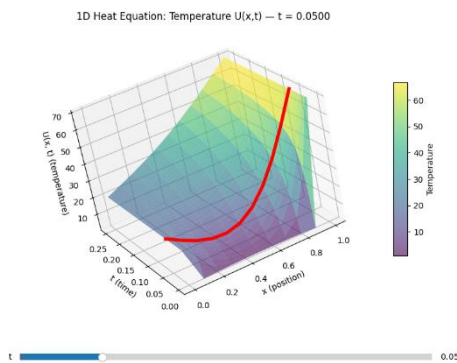


Рисунок 1 Візуалізація збіжності температурного поля в часовому розрізі

Для дослідження динаміки теплових процесів було реалізовано програмний комплекс, що базується на чисельному розв'язанні одновимірного рівняння теплопровідності.

На рисунку 1 представлено тривимірну інтерпретацію еволюції температурного поля $u(x, t)$. Така візуалізація дозволяє одночасно аналізувати просторовий розподіл температури та її зміну в часовому розрізі. Червона лінія на поверхні графіка відображає миттєвий профіль температури в обраний момент часу, що забезпечує наочність процесу встановлення теплової рівноваги.

Інтерактивний компонент системи (рисунок 2) дозволяє детально розглянути розподіл температури безпосередньо по довжині стрижня L . На відміну від статичних графіків, розроблена система дає змогу

спостерігати динаміку перетворення «абстрактних символів» математичної моделі у живу фізичну систему в режимі реального часу.

Розроблене програмне рішення може бути інтегроване в системи моніторингу теплових станів промислового обладнання.

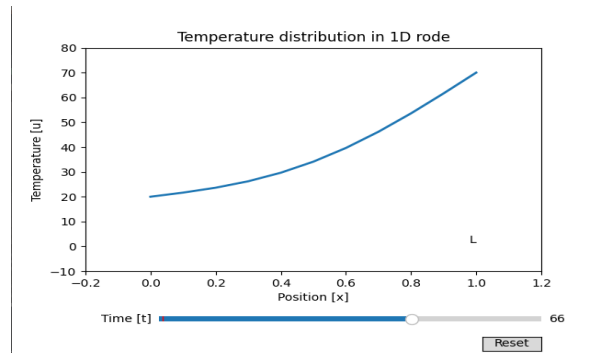


Рисунок 2 Чисельне моделювання процесу теплопровідності в одновимірному стрижні

Висновки

Реалізація системи інтерактивної візуалізації рівняння теплопровідності перетворює рівняння з абстрактних символів на живі, динамічні системи, доступні для розуміння та керування, що є кінцевою метою будь-якого наукового моделювання. Розроблена програмна архітектура забезпечує прозорий та оперативний аналіз складних теплових явищ. Отримані результати є методологічною базою для розробки наступного покоління симуляційного програмного забезпечення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Розв'язування рівнянь теплопровідності методом скінченних різниць. URL: <https://www.mathros.net.ua/rozv%E2%80%99jazuvannja-rivnjan-teploprovidnosti-metodom-skinchennyh-riznyc.html>. (Last accessed: 27.11.2025).
 2. Вікіпедія. Метод скінченних різниць — Вікіпедія. URL: https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D1%81%D0%BA%D1%96%D0%BD%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D1%85_%D1%80%D1%96%D0%B7%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8C&oldid=45505623. (Last accessed: 27.11.25).
 3. Бондаренко В. Г. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. для студентів спеціальності 124 «системний аналіз» / Віктор Григорович Бондаренко ; ред. Ю. В. Богданський. – Київ : [б. в.], 2018. – 100 с.
- Щуцький Павло Сергійович** – студент групи 2ПІ-24Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: pavlo050706@gmail.com
- Науковий керівник: **Кирилячук Світлана Анатоліївна** – кандидат педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: kyrylashchuk@vntu.edu.ua
- Shchutskyi Pavlo Serhiyovych** – student of group 2PI-24B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: pavlo050706@gmail.com
- Scientific supervisor: **Kyrylashchuk Svitlana Anatoliivna** – Candidate of Science in Pedagogy, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: kyrylashchuk@vntu.edu.ua