

ТЕОРІЯ ЛИШКІВ ТА КОНТУРНЕ ІНТЕГРУВАННЯ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто метод контурного інтегрування в комплексній площині як потужний інструмент обчислення складних інтегралів, що виникають у фізиці, теорії ймовірностей та інженерії. Показано ключову роль теореми Коші про лишки, яка дозволяє звести обчислення інтеграла вздовж замкнутого контуру до аналізу особливих точок підінтегральної функції. Метод дає змогу ефективно знаходити точні значення невласних інтегралів від дійсних функцій, які важко обчислити стандартними способами, а також застосовується в геометричній теорії функцій. Детально досліджено типові прийоми вибору контуру та застосування теореми для розв'язання практичних задач.

Ключові слова: контурний інтеграл, комплексна змінна, теорема Коші, лишок функції, особлива точка, невласний інтеграл.

Abstract

The work considers the method of contour integration in the complex plane as a powerful tool for calculating complex integrals arising in physics, probability theory, and engineering. The key role of Cauchy's residue theorem is shown, which reduces the calculation of an integral along a closed contour to the analysis of singular points (poles) of the integrand. The method makes it possible to effectively find the exact values of improper integrals of real functions that are difficult to compute by standard means, and is also applied in the geometric theory of functions. Typical techniques for contour selection and the application of the theorem for solving practical problems are studied in detail.

Keywords: contour integral, complex variable, Cauchy's theorem, function residue, singular point, improper integral.

Вступ

Обчислення складних інтегралів є однією з центральних задач прикладної математики. Багато інтегралів, що зустрічаються у квантовій механіці, оптиці, теорії теплопровідності, теорії ймовірностей та теорії сигналів, не піддаються обчисленню стандартними методами аналізу. У таких випадках на допомогу приходить метод контурного інтегрування в комплексній площині, який ґрунтується на використанні апарату теорії функцій комплексної змінної. Основна ідея методу полягає в тому, щоб доповнити дійсний інтеграл до інтеграла вздовж замкнутого контуру в комплексній площині, обчислити останній за допомогою теореми Коші про лишки, а потім виділити шукане значення вихідного інтегралу. Цей підхід поєднує глибину комплексного аналізу з геометричною інтерпретацією, що робить його незамінним інструментом у природничих та технічних науках. Дана робота присвячена систематичному викладу основ методу, класифікації типових задач та демонстрації його застосування на конкретних прикладах.

Результати дослідження

Теоретичні основи методу. Метод контурного інтегрування оперує з аналітичними функціями $f(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$. Центральне місце в методі займає поняття інтеграла вздовж кривої γ у комплексній площині: $\oint_{\gamma} f(z) dz$. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області, що містить контур γ , то за інтегральною теоремою Коші такий інтеграл дорівнює нулю. Проте, якщо всередині контуру містяться ізольовані особливі точки (полюси), значення інтеграла визначається теоремою про лишки: $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res } f(a_k)$, де сума береться по всіх полюсах a_k всередині γ , а $\text{Res } f(a_k)$ – лишок функції f у точці a_k . Цей фундаментальний результат є ключем до обчислення широкого класу дійсних інтегралів. Основні типи інтегралів та прийоми обчислення. На практиці метод застосовується до таких основних типів інтегралів:

Інтеграли виду $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$, де $R(x)$ – раціональна функція з поліномами степеня, що забезпечує збіжність. Контур вибирається у вигляді замкненої кривої, що складається з відрізка дійсної осі $[-R, R]$ та дуги півкола великого радіуса в верхній півплощині.

Інтегралі виду $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax} dx$ ($a > 0$). Для їх обчислення також використовується доповнення до контуру півколом у верхній півплощині, оскільки на такій дузі функція e^{iax} експоненційно згасає завдяки лемі Жордана.

Інтегралі від тригонометричних функцій на проміжку $[0, 2\pi]$. Такі інтегралі зводяться до інтегралів по одиничному колу за допомогою підстановки $z = e^{i\theta}$.

Геометрична інтерпретація та вибір контуру. Успіх методу значною мірою залежить від вдалого вибору контуру інтегрування. Окрім півкола, часто використовуються контури у вигляді прямокутників (для інтегралів з гіперболічними функціями), секторів кіл (для інтегралів виду $\int_0^{\infty} x^a R(x) dx$) або контури, що обгинають точки розгалуження (для багатозначних функцій). Геометричний вибір контуру дозволяє звести складну задачу обчислення до аналізу поведінки функції в околі її особливих точок.

Приклади застосування в прикладних науках. Метод контурного інтегрування має численні застосування:

У квантовій механіці: метод є основним для обчислення амплітуд ймовірності у формалізмі шляхового інтегралу Фейнмана. Він також критично важливий у методі стаціонарної фази для наближеного обчислення інтегралів, що описують поширення хвиль, та у квантовій теорії поля для роботи з петльовими інтегралами у фейнманівських діаграмах.

У оптиці: метод дозволяє точно обчислювати інтеграли Френеля, які описують дифракцію світла. Теорія лишків також лежить в основі співвідношень Крамерса-Кроніга, що зв'язують дійсну та уявну частини комплексного показника заломлення та описують принцип причинності в оптичних середовищах.

Аналіз розподілів: метод є незамінним для виконання зворотного перетворення Фур'є від характеристичної функції випадкової величини, що дозволяє відновлювати її щільність розподілу ймовірностей та аналізувати суми незалежних величин.

У теорії ймовірностей: знаходження характеристичних функцій розподілів та обчислення інтегралів, що виникають при роботі з густинами ймовірностей.

Висновки

Метод контурного інтегрування в комплексній площині є універсальним інструментом обчислення складних інтегралів, що виходять за межі можливостей стандартного аналізу. Його основу становить теорема Коші про лишки, яка дозволяє звести задачу інтегрування до алгебраїчної операції підсумовування лишків функції в її особливих точках. Ефективність методу залежить від вмілого вибору доповнюючого контуру, що вимагає розуміння як аналітичних властивостей функції, так і геометрії комплексної площини. Завдяки своїй універсальності метод знаходить широке застосування в різних галузях природничих і технічних наук – від квантової фізики до теорії обробки сигналів, сприяючи глибшому розумінню складних математичних моделей та отриманню точних аналітичних результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Основна теорема про лишки [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Основна_теорема_про_лишки
2. Використання інтеграції контуру для вирішення визначених інтегралів [Електронний ресурс] – Режим доступу: [https://ukrayinska.libretexts.org/фізики/Математична_фізика_і_педагогіка/Комплексні_методи_для_наук_\(Chong\)/09:_Контур_Інтеграція/9.4](https://ukrayinska.libretexts.org/фізики/Математична_фізика_і_педагогіка/Комплексні_методи_для_наук_(Chong)/09:_Контур_Інтеграція/9.4)
3. Комплексний аналіз [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/94b6c557-63b6-4ae8-ac1c-aa101cb8d9fa/content>
4. Хом'юк І. В. Елементи лінійної алгебри та лінійного програмування: навчальний посібник / Хом'юк І. В., Хом'юк В. В., Сачанюк-Кавецька Н.В. – Вінниця: ВНТУ. –2025. 151с.
5. Хом'юк І. В. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з теми «Інтегрування функції комплексної змінної» дисципліни вища математика для студентів всіх спеціальностей / Хом'юк І. В., Хом'юк В. В. – Вінниця: ВНТУ. –2025. 43с.

Лавров Микола Васильович - студент групи 1ПКТ-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: first.kreox@gmail.com

Хом'юк Ірина Володимирівна – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Lavrov Mykola Vasylovych - student of group 1PKT-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: first.kreox@gmail.com

Irina V. Khomyuk – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com