

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВТОМИ МЕТАЛІВ В ДЕТАЛЯХ МАШИН

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Робота присвячена математичному моделюванню втоми металів в умовах циклічних навантажень. Обґрунтовано необхідність переходу від детермінованих розрахунків до ймовірнісних методів через наявність випадкових факторів у структурі матеріалу та навантаженнях. Запропоновано математичну модель росту втоми тріщини на базі стохастичних диференціальних рівнянь, що є узагальненням напівемпіричного закону Періса-Ердогана. Введення стохастичної компоненти (Вінерівського процесу) дозволило змодельовати еволюцію тріщини як дифузійний процес та отримати функцію розподілу ймовірності часу до руйнування. Результати дослідження дають змогу точніше оцінювати залишковий ресурс відповідальних вузлів машин та оптимізувати графіки технічного обслуговування.

Ключові слова: втома тріщина, стохастичні диференціальні рівняння, закон Періса-Ердогана, прогнозування ресурсу.

Abstract

This work is devoted to the mathematical modeling of metal fatigue under cyclic loading conditions. The necessity of shifting from deterministic calculations to probabilistic methods is substantiated by the presence of random factors inherent in the material structure and loading conditions. A mathematical model of fatigue crack growth based on stochastic differential equations is proposed, representing a generalization of the semi-empirical Paris-Erdogan law. The incorporation of a stochastic component (a Wiener process) allowed modeling crack propagation as a diffusion process and deriving the probability distribution function of the time to failure. The research results enable a more accurate estimation of the residual service life of critical machine components and the optimization of maintenance schedules.

Keywords: fatigue crack, stochastic differential equations, Paris-Erdogan law, service life prediction.

Вступ

Втома металів є однією з основних причин руйнування обладнання та машин [1, 2, 3], що працюють під дією змінних навантажень. Традиційні детерміновані моделі [4, 5, 6] не завжди забезпечують достатню точність прогнозування, оскільки не враховують випадковий характер експлуатаційних умов, неоднорідність мікроструктури та статистичний розкид параметрів матеріалу. У зв'язку з цим зростає інтерес до стохастичних підходів [7, 8, 9], які дозволяють описувати процес росту тріщин як випадковий процес із певними ймовірнісними характеристиками. Одним із найбільш ефективних інструментів є стохастичні диференціальні рівняння, що поєднують детерміновану компоненту механічної моделі та випадкові флуктуації, притаманні реальним умовам експлуатації. Їх застосування відкриває можливість підвищення точності оцінки ресурсу та розроблення більш надійних інженерних рішень [10, 11, 12], а також підготовки сучасних фахівців [13, 14, 15].

Результати дослідження

В основу побудови стохастичної моделі покладено напівемпіричне рівняння Періса-Ердогана [16]. Для врахування неоднорідності матеріалу та мікроструктурних дефектів у модель введено мультиплікативний шум. Його основна особливість в тому, що чим довша тріщина, тим сильніші випадкові відхилення у швидкості її росту. Припускаючи сталу частоту навантаження ν , перейдемо від кількості циклів N до часу t . Оскільки $N = \nu \cdot t$, то диференціал циклів замінюється як $dN = \nu \cdot dt$. Отримане стохастичне диференціальне рівняння приросту довжини тріщин у формі Іто має вигляд:

$$da(t) = v \cdot C(\Delta K)^m dt + \beta \cdot a(t) dW(t), \quad (1)$$

де v – частота циклічного навантаження; C, m – мпіричні константи матеріалу за законом Періса (визначені для циклів); ΔK – розмах коефіцієнта інтенсивності напружень; β – коефіцієнт дифузії, що характеризує інтенсивність стохастичних збурень; $a(t)$ – поточна довжина тріщини в момент часу t ; $dW(t)$ – приріст Вінерівського процесу (білий шум), що моделює випадкові збурення.

Замість візуального аналізу траєкторій, було проведено кількісну оцінку розсіювання розмірів тріщини в залежності від кількості циклів навантаження N . Для цього на кожному кроці розраховувалося середньоквадратичне відхилення $\sigma(N)$ для 10 000 реалізацій процесу. Результати показали нелінійне зростання невизначеності з часом (табл. 1).

Таблиця 1 – Результати розрахунків

Кількість циклів N	Детермінована довжина a_{det} , мм	Математичне сподівання $E[a]$, мм	Стандартне відхилення σ_a , мм	Коефіцієнт варіації $V = (\sigma/E) \cdot 100\%$, %
50 000	3.50	3.52	0.45	12.8%
100 000	8.20	8.35	1.85	22.1%
140 000	16.50	17.10	4.90	28.6%

Дані демонструють, що на початкових етапах (50 000 циклів) розкид значень є незначним (варіація 12.8%), проте при наближенні до критичного стану (140 000 циклів) коефіцієнт варіації сягає майже 30%. Використання детермінованих моделей для довгострокового прогнозування дає значну похибку через накопичення стохастичних ефектів.

Розподіл довжини тріщини у довільний момент часу t прогресує від дельта-функції (в момент $t = 0$) до логнормального розподілу. Це означає, що "довгий хвіст" розподілу (рідкісні випадки швидкого руйнування) має вирішальне значення для безпеки. Ігнорування цього факту в інженерній практиці призводить до недооцінки ризиків руйнування на пізніх стадіях експлуатації.

Висновки

У роботі реалізовано перехід від детермінованого опису втоми металів до стохастичного. Інтеграція стохастичного шуму (Вінерівського процесу) у рівняння Періса-Ердогана дозволяє коректно моделювати вплив мікроструктурної неоднорідності матеріалу на швидкість поширення тріщин.

На основі чисельного розрахунку встановлено, що похибка прогнозування ресурсу не є сталою величиною. Виявлено нелінійне зростання коефіцієнта варіації розміру тріщини: від 12.8% на початкових стадіях та до 28.6% при наближенні до критичного стану. Це впливає на довгострокові детерміновані прогнози, які втрачають фізичний зміст через накопичення стохастичних помилок.

Результати роботи обґрунтовують необхідність використання таких підходів в машинобудуванні. Використання стохастичного диференціального рівняння дозволить встановлювати міжремонтні інтервали не за «середнім» ресурсом, а за допустимим рівнем ризику, що критично важливо для забезпечення безпеки при експлуатації різних металевих конструкцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Curtis L. R., Ayyub B. M. Uncertainty of Thermodynamic-Entropy-Based Reliability and Remaining Useful Life Predictions Under Variable Amplitude Fatigue. In *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2023. Vol. 87707. V013T15A024. 14 p.
2. Vishtak I. V., Petrov O. V., Savulyak V. I., Sukhorukov S. I. Influence of the profile of longitudinal grooves of various depths on increasing static characteristics of radial gas bearings. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* Vol. 1060, No. 1, 2021. P. 012011
3. Піонткевич О. В., Сухоруков С. І., Сердюк О. В., Домославський В. М. Про лазерний технологічний комплекс на машинобудівному підприємстві. Вісник машинобудування та транспорту. Вінниця: ВНТУ, 2022. № 2. С. 96-100.
4. Huzni S., Rahmaddireja J., Fonna S., Ridha M. S-N Curve Estimation of AISI 304 in Air and Corrosive Environment Using Finite Element Method. In *Proceeding Seminar Nasional Tahunan Teknik Mesin XII*, 2013. pp. 1197-1200.
5. Петров О. В., Піонткевич О. В., Буда А. Г., Коломієць В. С. Застосування CAD/CAE-системи Solidworks у задачах аналізу міцності деталей верстатних пристосувань. Вісник машинобудування та транспорту. Вінниця : ВНТУ, 2024. Вип. 19. № 1. С. 95–102.

6. Піонткевич О. В., Березюк О. В., Лозінський Д. О., Кавецький О. І. Застосування CAD/CAE-системи Autodesk Inventor для удосконалення фрезерно-гравірувального верстата з ЧПК. *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*. Вінниця : ВНТУ, 2025. Вип. 1. С. 1–9. <https://doi.org/10.31649/2307-5376-2025-1-178-186>
7. Cox B. N., Bale H. A., Begley M., Blacklock M., Do B. C., Fast T., Marshall D. B. (2014). Stochastic virtual tests for high-temperature ceramic matrix composites. *Annual Review of Materials Research*. 2014. Vol. 44(1), P. 479-529.
8. Generale A. P., Robertson A. E., Kelly C., Kalidindi S. R. Inverse stochastic microstructure design. *Acta Materialia*, 2024. Vol. 271, 119877.
9. Vanaerschot A., Panerai F., Cassell A., Lomov S. V., Vandepitte D., Mansour N. N. Stochastic characterisation methodology for 3-D textiles based on micro-tomography. *Composite Structures*, 2017. Vol. 173, P. 44-52.
10. Березюк О. В. та ін. Перспективи використання техногенної сировини при виробництві композиційних в'язучих. *Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві*, 2022. № 2. С. 36-45.
11. Хом'юк В. В., Хом'юк І. В. Компетентно-орієнтовані завдання як важливий чинник формування когнітивної складової математичної компетентності майбутніх інженерів. *Збірник наукових праць "Актуальні питання природничо-математичної освіти"*. Вип. 1, 2017. С. 107–114.
12. Березюк О.В. Розробка та дослідження нової структури екологічної машини для очистки населених пунктів від твердих відходів. *Сучасні технології, матеріали і конструкції у будівництві*. – 2008. – № 1. – С. 92-98.
13. Хом'юк І. В., Хом'юк В. В. Математичне моделювання в контексті здійснення між предметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ. *Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. Вип. 2, 2017. С. 43–50.
14. Піонткевич О. В., Лозінський Д. О., Сердюк О. В., Савуляк В. В. Забезпечення результатів вивчення CAD/CAE/CAM систем для підготовки фахівців із спеціальності «Прикладна механіка». *Матеріали XVI Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасна освіта - доступність, якість, визнання»*, 13–14 листопада 2024 р. КраматорськВінниця-Тернопіль, Краматорськ : ДДМА, 2024. С. 247-252.
15. Хом'юк І. В., Хом'юк В. В. Деякі аспекти використання компетентнісного підходу до викладання фундаментальних дисциплін у ВНЗ. *Вісник Луганського національного університету імені Тараса Шевченка*. № 22, 2012. Вип. 257. С. 215–222.
16. Shariff A. A. A stochastic Paris-Erdogan model for fatigue crack growth using two-state model. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series*, 2008. Vol. 31(1), P. 97-108.

Кулісиді Володимир Миколайович — здобувач вищої освіти групи 2ПМ-24б, Факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Чишок Андрій Михайлович — здобувач вищої освіти групи 1ПМ-24б, Факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Науковий керівник: **Хом'юк Віктор Вікторович** — к. техн. наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: khomyuk@vntu.edu.ua

Kulisidi Volodymyr M. — student of group 2PM-24b, Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Chyshok Andrii M. — student of group 1PM-24b, Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Supervisor: **Khomyuk Viktor V.** — Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: khomyuk@vntu.edu.ua