

РЯД ТЕЙЛОРА ТА РЯД МАКЛОРЕНА: ІСТОРІЯ, ВИВЕДЕННЯ, ЗАСТОСУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто ряди Тейлора та Маклорена як засоби подання та апроксимації функцій у математичному аналізі. Наведено короткий історичний огляд розвитку степеневих розкладів, подано виведення загальної формули, проілюстровано приклади для основних елементарних функцій. Показано практичне застосування рядів для побудови поліноміальних наближень та зазначено обмеження методу.

Ключові слова: ряд Тейлора; ряд Маклорена; степеневий розклад; апроксимація; залишковий член; аналіз функцій; математичний аналіз.

Abstract

The paper considers Taylor and Maclaurin series as means of representing and approximating functions in mathematical analysis. A brief historical overview of the development of power series is given, a general formula is derived, and examples for basic elementary functions are illustrated. The practical application of series for constructing polynomial approximations is shown, and the limitations of the method are indicated.

Keywords: Taylor series; Maclaurin series; power series; approximation; remainder term; function analysis; mathematical analysis.

Вступ

Ряди Тейлора та Маклорена є одним із ключових інструментів математичного аналізу, що дозволяє розкласти функцію в нескінченну суму степеневих членів, побудованих на основі її похідних у певній точці. Такий підхід дає можливість обчислювати значення функцій, які не виражаються елементарними формулами, а також досліджувати їхню поведінку поблизу точки розкладання.

Метою цієї доповіді є розгляд історичного розвитку рядів Тейлора та Маклорена, теоретичного виведення загальної формули, а також аналіз їх застосувань у задачах апроксимації функцій.

Результати досліджень

Історичний розвиток. Ідея представлення функцій у вигляді нескінченної суми бере свій початок ще у XIV–XV століттях в Індії. У школі Мадхава з Сангамаграма (близько 1350–1425 рр.) були знайдені ряди для тригонометричних функцій — синуса, косинуса та арктангенса, відомі нині як «ряди Мадхави-Лейбніца». Пізніше, у XVII столітті, шотландський математик Джеймс Грегорі розглянув можливість розкладу арктангенса на степеневий ряд. Загальна формула розкладу вперше з'явилася в 1715 році у праці англійського математика Брука Тейлора, який систематизував ідею наближення функцій за допомогою похідних. [1]

Особливий випадок, коли розкладання проводиться навколо точки $a = 0$, був детально вивчений шотландським ученим Коліном Маклореном, завдяки чому відповідний ряд отримав його ім'я. Історичний аналіз розвитку теореми Тейлора подано, зокрема, у праці Г. Гібсона «Taylor's Theorem and Bernoulli's Theorem: A Historical Note» (1920), де висвітлюється еволюція ідей від ранніх аналітичних підходів до формального доведення. [2]

Найважливіша функціональна роль рядів Тейлора та Маклорена полягає в апроксимації трансцендентних функцій поліномами, що слугує основою для чисельних методів у прикладних науках. Цей підхід дозволяє замінити складні обчислення низкою простих арифметичних операцій, що має вирішальне значення в епоху комп'ютерних технологій.

Чисельний аналіз та обчислювальна техніка. Використання полінома Тейлора $P_n(x)$, який є кінцевою сумою перших n членів нескінченного ряду, є стандартним методом для реалізації елементарних функцій (таких як e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$) у програмному забезпеченні та апаратному забезпеченні комп'ютерів та інженерних калькуляторів [3]. Висока точність обчислень гарантується завдяки контролю над залишковим членом $R_n(x)$ у формі Лагранжа, що забезпечує кількісну оцінку похибки апроксимації та гарантує, що похибка обчислення не перевищує заданого допуску в заданому околі точки розкладу [4]. Крім того, ряди Тейлора є фундаментальними для виведення багатьох чисельних методів [5]. Вони лежать в основі алгоритмів чисельного диференціювання, де похідні функції замінюються скінченними різницями, а також є необхідними для побудови вискоєфективних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, зокрема методу Рунге-Кутти [5].

Застосування у фізиці та інженерії. У фізичних та інженерних моделях ряди Тейлора використовуються для спрощення нелінійних рівнянь шляхом лінеаризації функцій в околі точки рівноваги або для малих збурень [6]. Наприклад, при аналізі малих коливань (як у простому маятнику), рівняння руху якого містить $\sin(\theta)$, застосовується наближення першим ненульовим членом ряду Маклорена: $\sin(\theta) \approx \theta$ для малих кутів θ . Це дозволяє перетворити нелінійну систему на лінійну, яка легко піддається аналітичному розв'язку [6]. У теорії відносності для низьких швидкостей ($v \ll c$) кінетична енергія E_k розкладається в ряд Маклорена: $E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$. Це демонструє, як релятивістські ефекти розглядаються як малі поправки до класичних результатів [7]. В оптиці та акустиці при аналізі розповсюдження хвиль функції показника заломлення або швидкості звуку часто розкладаються в ряди Тейлора навколо деякої точки, що значно спрощує розв'язання хвильових рівнянь [7].

Аналіз функцій та границь. Ряди Тейлора також є потужним аналітичним інструментом для дослідження локальної поведінки функції. Вони використовуються для розкриття невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ при обчисленні границь. Замінюючи функції їхніми рядами Маклорена, можна легко виділити головну частину виразу та обчислити границю, що є ефективною альтернативою правилу Лопітала [4]. Крім того, аналіз коефіцієнтів ряду Тейлора дозволяє визначити характер критичної точки a : якщо перша ненульова похідна $f^{(n)}(a)$ має парний порядок n , функція має локальний екстремум; якщо непарний — то перегин [4].

Висновки:

Ряди Тейлора та Маклорена є одним із найпотужніших інструментів у математичному аналізі, що дозволяють наближати складні функції поліномами довільно високого порядку. Історичний розвиток цих рядів демонструє поступовий перехід від емпіричних спостережень тригонометричних рядів у школі Мадгави до формального математичного апарату, створеного Тейлором та поглибленого Маклореном.

Практичне значення рядів полягає у можливості полегшення обчислень, побудови наближень у математичному моделюванні, застосуванні в чисельних методах, розв'язанні диференціальних рівнянь та аналізі фізичних процесів.

Попри універсальність, ряди Тейлора мають певні обмеження, зокрема залежність від області збіжності та неможливість коректної апроксимації деяких функцій. Проте у більшості математичних і прикладних задач вони залишаються незамінними завдяки поєднанню простоти обчислень та високої точності наближень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Weisstein, E. W. *Taylor Series* [Електронний ресурс]. Wolfram MathWorld. Режим доступу: <https://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html>
2. *Taylor Series* [Електронний ресурс]. Wikipedia. Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series
3. Gibson, G. A. *Taylor's Theorem and Bernoulli's Theorem: A Historical Note*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1920. 9 с. Режим доступу: https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/EBFA70EE9664B46_7B68/6005B90A564CF/S0013091500035768a.pdf
4. *Calculus II – Taylor Series* [Електронний ресурс]. Lamar University Tutorial. Режим доступу: <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/taylorseries.aspx>

5. *Derivation of Taylor Series Expansion* [Електронний ресурс]. Lecture Notes, University of Illinois. Режим доступу: https://hep.physics.illinois.edu/home/serrede/P435/Lecture_Notes/Derivation_of_Taylor_Series_Expansion.pdf
6. *Brook Taylor (1685–1731): Biography* [Електронний ресурс]. University of St Andrews History of Mathematics Archive. Режим доступу: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor>
7. *Madhava Series* [Електронний ресурс]. Wikipedia. Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Madhava_series

Булбак Руслана Русланівна – студентка групи 2 КН-24 б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: bulbakruslana@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Bulbak Ruslana- student of group 4KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: bulbakruslana@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com