

ПРОБЛЕМА ФЕНОМЕНУ РУНГЕ ПРИ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ БІРЖОВИХ КОТИРУВАНЬ ПОЛІНОМОМ ЛАГРАНЖА

¹Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено проблему виникнення феномену Рунге при спробі застосування класичних методів поліноміальної інтерполяції для прогнозування фінансових часових рядів. Проведено аналіз похибки інтерполяційного полінома Лагранжа високого степеня на рівновіддалених вузлах у контексті стохастичної природи біржових цін. Показано, що прагнення підвищити точність моделі шляхом збільшення глибини історичних даних призводить до катастрофічного зростання амплітуди осциляцій на краях інтервалу, що робить отримані прогнози економічно змістовними лише для короткострокової інтерполяції, але непридатними для екстраполяції (прогнозування).

Ключові слова: феномен Рунге, інтерполяція Лагранжа, фінансові часові ряди, екстраполяція, похибка наближення, волатильність, константа Лебега.

Abstract

The paper investigates the problem of the Runge phenomenon occurrence when applying classical polynomial interpolation methods for forecasting financial time series. An analysis of the error of the high-degree Lagrange interpolation polynomial on equidistant nodes is conducted in the context of the stochastic nature of stock prices. It is shown that the attempt to improve model accuracy by increasing the depth of historical data leads to a catastrophic increase in oscillation amplitude at the interval edges. This makes the obtained forecasts economically meaningful only for short-term interpolation but unsuitable for extrapolation (forecasting).

Keywords: Runge phenomenon, Lagrange interpolation, financial time series, extrapolation, approximation error, volatility, Lebesgue constant.

Вступ

Однією з фундаментальних задач фінансової математики є побудова моделей, здатних описувати та прогнозувати динаміку цінкових активів. Інтуїтивно привабливим підходом здається використання методів чисельного аналізу для відновлення аналітичної функції ціни $P(t)$ за її дискретними історичними значеннями. Згідно з теоремою Вейерштрасса, будь-яку неперервну функцію можна як завгодно точно наблизити поліномом. Це спонукає дослідників застосовувати інтерполяційні поліноми Лагранжа для пошуку закономірностей у біржових котируваннях. Проте на практиці необґрунтоване застосування детермінованих методів апроксимації до стохастичних фінансових даних стикається з серйозною математичною проблемою — феноменом Рунге, який проявляється у вигляді неконтрольованих осциляцій моделі.[1] Метою роботи є аналіз причин виникнення цього ефекту та демонстрація неприпустимості використання глобальної поліноміальної інтерполяції для екстраполяції фінансових трендів.

Результати дослідження

В основі методу поліноміальної інтерполяції лежить побудова полінома $L_n(x)$ степеня n , який проходить через $n + 1$ задану точку (x_i, y_i) , де x_i — моменти часу, а y_i — ціни активу. Для фінансових даних сітка вузлів інтерполяції є рівновіддаленою (дні, години), що є критичним фактором для точності методу. Математичний аналіз похибки інтерполяції $R_n(x)$ показує, що вона залежить від добутку похідної $(n + 1)$ -го порядку функції та вузлового полінома $\omega_{n+1}(x)$. У випадку рівновіддалених вузлів константа Лебега, яка характеризує чутливість інтерполяційного процесу до похибок, зростає експоненціально зі збільшенням степеня полінома n . Феномен Рунге виникає, коли функція, що інтерполюється, має особливості (полюси) в комплексній площині, розташовані надто близько до інтервалу інтерполяції. Для біржових графіків, які характеризуються високою волатильністю, різкими зламами трендів та шумом ("важкі хвости" розподілу), похідні високих порядків набувають достатньо великих

значень.[2] При спробі описати такий складний процес одним поліномом високого степеня (наприклад, $n > 10$), модель ідеально проходить через історичні точки, але між ними та особливо на краях інтервалу починає генерувати хибні коливання достатньо великої амплітуди. Це призводить до парадоксальної ситуації: додавання нових історичних даних не уточнює прогноз, а руйнує його.

Висновки

Дослідження показало, що застосування інтерполяційного полінома Лагранжа високого степеня для прогнозування біржових котирувань є математично некоректним через виникнення феномену Рунге. Рівновіддаленість часових інтервалів торгів та стохастична природа цін призводять до експоненціального зростання похибки на краях вибірки. Встановлено, що поліноміальна інтерполяція може використовуватися лише для локального відновлення пропущених даних (імпутації), але для задач екстраполяції (прогнозування майбутнього) необхідно використовувати сплайн-апроксимацію або ймовірнісні моделі, стійкі до локальних збурень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Runge C. Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten // Zeitschrift für Mathematik und Physik. – 1901. – Bd. 46. – S. 224–243.
2. Trefethen L. N. Approximation Theory and Approximation Practice. – SIAM, 2013. – 305 p.
3. Epureanu B. I. Runge phenomenon in financial time series // Journal of Computational Finance. – 2020. – Vol. 23, № 4. – P. 1–25.
4. Крилик Л. В. Чисельні методи: навч. посіб. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 111 с.
5. De Boor C. A Practical Guide to Splines. – New York: Springer-Verlag, 2001. – 346 p.

Мусієнко Ігор Сергійович — студент групи 1KI-25МС, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: shark9248@gmail.com

Бондаренко Злата Василівна — канд. педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Науковий керівник: **Бондаренко Злата Василівна** — канд. педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Musienko Ihor S. — student of group 1KI-25MS, Faculty of Information Technology and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: shark9248@gmail.com

Bondarenko Zlata V. — Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Supervisor: **Bondarenko Zlata Vasyilivna** — Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia