

АЛГОРИТМІЧНІ ПІДХОДИ ТА АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО 8 ФЕРЗІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі проаналізовано алгоритмічні підходи до розв'язання задачі про восьми ферзів, включаючи BFS, DFS, перебір з поверненням, алгоритм сходження на вершину та A^* . Проведено порівняння їхньої часової та просторової складності, а також здатності знаходити коректні розв'язки. Показано, що евристичні методи, зокрема алгоритм A^* , значно ефективніші за класичні неінформовані підходи, особливо для більших розмірів задачі.

Ключові слова: задача про 8 ферзів, N-ферзі, пошук у ширину, BFS, пошук у глибину, DFS, перебір з поверненням, алгоритм сходження на вершину, A^* , неінформований пошук, евристичний пошук.

Abstract

The paper analyses algorithmic approaches to solving the eight queens problem, including BFS, DFS, backtracking, Hill Climbing, and A^* . A comparison of their time and space complexity, as well as their ability to find correct solutions, is performed. It is shown that heuristic methods, in particular the A^* algorithm, are significantly more effective than classical uninformed approaches, especially for larger problem sizes.

Keywords: the problem of 8 queens, N-queen, breadth-first search, BFS, depth-first search, DFS, backtracking, Hill Climbing, A^* , uninformed search, heuristic search.

Вступ

Історія задачі сягає 1848 року, коли німецький шахіст Макс Беззель (Max Bezzel) вперше сформулював її для стандартної дошки 8×8 у виданні «Berliner Schachzeitung». З того часу вона пройшла шлях від шахової головоломки до фундаментальної проблеми, що має застосування в нейронних мережах, управлінні трафіком та навіть у дослідженні структури нуклеїнових кислот [1].

Задача про восьми ферзів – це класична комбінаторна проблема, що полягає у розміщенні восьми ферзів на шахівниці розміром 8×8 так, щоб жодна з фігур не атакувала іншу по горизонталі, вертикалі чи діагоналі. Відомо, що для стандартної дошки існує рівно 92 коректні розв'язки, і ця кількість доведена математично. Задачу можна узагальнити до випадку N ферзів на дошці $N \times N$, так званої задачі N-Queens. Наприклад, для розміру 4×4 знайдено лише два розв'язки, тоді як для великих N, зокрема 23×23 , кількість можливих конфігурацій зростає до трильйонів [2].

Щодо оцінки кількості розв'язків $Q(N)$ для дуже великих N, то лише нещодавно було досягнуто суттєвого прогресу. У 2023 році Майкл Сімкін (Michael Simkin) довів теорему, яка визначає асимптотичну поведінку числа розв'язків. Згідно з цим дослідженням, кількість конфігурацій наближено дорівнює $(0.143N)^N$ при $N \rightarrow \infty$ [1].

Попри те що загальна кількість можливих шахових партій (число Шеннона) оцінюється величиною близько 10^{120} , що унеможливує повний перебір у грі [3], задача про 8 ферзів має значно менший простір станів. Саме тому вона традиційно використовується як зручний тестовий приклад для дослідження та порівняння алгоритмів штучного інтелекту.

Результати дослідження

Для розв'язання задачі про N ферзів застосовують широкий спектр методів, які умовно поділяють на неінформовані (сліпі) та евристичні. Неінформовані підходи не використовують жодних знань про бажаний фінальний стан і досліджують простір рішень повністю або частково, що робить їх коректними, але не завжди ефективними.

Одним із найстаріших і найнадійніших підходів до розв'язання задачі про N ферзів є перебір з поверненням (backtracking), який послідовно будує дерево можливих розташувань ферзів і відкидає ті гілки, що приводять до конфліктів. До цієї ж групи належать і неінформовані методи пошуку – пошук у ширину (BFS) та пошук у глибину (DFS). Обидва підходи виконують рівномірний, «сліпий» перебір станів і не використовують інформацію про структуру задачі, що призводить до різкого зростання витрат при збільшенні розміру дошки. Для BFS часова складність оцінюється як $O(b^{d+1})$, а для DFS – як $O(b^m)$, де b –

середня кількість можливих продовжень (розгалуження), d – глибина рішення, а m – максимальна глибина пошуку. Через це для великих N такі методи швидко стають обчислювально непридатними через надмірні витрати пам'яті та часу [4].

На відміну від неінформованих методів, евристичні підходи використовують функції оцінки, які спрямовують пошук у більш перспективні стани. Одним із найефективніших методів є алгоритм A^* , що поєднує вартість уже пройденого шляху та евристичну оцінку $h(n)$, яка може враховувати, зокрема, кількість конфліктів між ферзями. Мета пошуку полягає в досягненні стану, де $h(n)=0$, тобто всі ферзі розташовані без взаємних атак. Алгоритм A^* є повним та оптимальним і має експоненційну часову складність, але водночас використовує значно менше пам'яті, оскільки зберігає лише найкращі вузли для подальшого розгляду. Практичні результати показують, що він працює значно швидше за BFS і DFS та потребує суттєво менших обчислювальних ресурсів [4].

Серед інших евристичних методів застосовується алгоритм сходження на вершину (Hill Climbing), який обирає наступний стан із найменшою кількістю конфліктів між ферзями. Завдяки цьому метод відрізняється простотою та швидкістю роботи: часові витрати залежать від розгалуження b і можуть бути дуже великими ($O(\infty)$), а обсяг пам'яті – мінімальний ($O(b)$). Проте він не є повним і може «застрягати» у локальних оптимумах – станах, які не є розв'язками, але виглядають кращими за всі сусідні. Через це надійність Hill Climbing у задачі N -Queens значно нижча, ніж у алгоритму A^* [4].

Ще одним напрямом є генетичні алгоритми, засновані на принципах природного добору, схрещування та мутації. Вони добре працюють у надвеликих просторах рішень, зокрема при великих N , проте вимагають ретельного налаштування параметрів та не завжди гарантують швидке збіження до оптимального розв'язання [4].

Висновки

У роботі було проведено порівняльний аналіз класичних та евристичних алгоритмів для розв'язання задачі про вісім ферзів. Дослідження показало, що неінформовані методи пошуку – BFS, DFS та перебір з поверненням – хоча й гарантують знаходження розв'язку, мають експоненційну складність і швидко стають неефективними зі збільшенням розміру задачі. Евристичні підходи виявилися продуктивнішими: алгоритм сходження на вершину забезпечує високу швидкість, але не є надійним через можливість потрапляння в локальні оптимуми. Найкращі результати продемонстрував алгоритм A^* , який поєднує оптимальність, повноту та відносно низькі обчислювальні витрати, що робить його найбільш придатним для розв'язання узагальненої задачі N -Queens. Таким чином, для практичного застосування та масштабування задачі перевагу слід надавати евристичним методам, зокрема алгоритму A^* .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. García Sánchez A. The n-Queens Problem: An Activity Book. University of Warwick, 2023. 43 с. URL: <https://urss.warwick.ac.uk/items/show/321> (дата звернення: 06.12.2025).
2. Abu-Dalbouh H. M., Almansour F., Aldowighri N. Game Playing: Proposing and Developing Queen Challenge Puzzle Game from 1 to 25 Levels. *Computer and Information Science*. 2021. Т. 14, № 2. С. 87. URL: <https://doi.org/10.5539/cis.v14n2p87> (дата звернення: 03.12.2025).
3. Костюк Д. В., Хом'юк В. В. Комбінаторний аналіз та оцінка ймовірностей у шахах: математичні основи стратегії. *Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2025)*: Матеріали Міжнар. науково-практ. інтернет-конф., м. Вінниця, 15 жовт. 2024 р. – 15 черв. 2025 р. Вінниця : ВНТУ, 2025. С. 652–654. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2025/paper/viewFile/25406/20977> (дата звернення: 05.12.2025).
4. Mathew K., Tabassum M. Experimental Comparison of Uninformed and Heuristic AI Algorithms for N Puzzle and 8 Queen Puzzle Solution. *International Journal of Digital Information and Wireless Communications*. 2014. Т. 4, № 1. С. 143–154. URL: <https://doi.org/10.17781/p001092> (дата звернення: 05.12.2025).

Царенко Максим Олександрович – студент групи ІПКТ-246, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: maksimcarenko700@gmail.com.

Науковий керівник: **Хом'юк Ірина Володимирівна** – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Tsarenko Maksym Oleksandrovych – student of group 1PKT-24b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: maksimcarenko700@gmail.com.

Supervisor: **Irina Khomyuk** – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com.