

ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ ЯК ОДИН ІЗ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді розглянуто суть інтегральної ознаки Коші як одного з основних методів дослідження збіжності числових та функціональних рядів. Проаналізовано умови застосування цього критерію та його значення у математичному аналізі. Наведено приклади використання інтегральної ознаки Коші для визначення збіжності та розбіжності рядів. Зроблено висновки щодо практичної цінності даного методу у підготовці студентів технічних спеціальностей та подальших математичних дослідженнях.

Ключові слова: інтегральна ознака Коші, збіжність, розбіжність, числові ряди, математичний аналіз

Abstract

The report examines the essence of Cauchy's integral test as one of the main methods for studying the convergence of numerical and functional series. The conditions for applying this criterion and its significance in mathematical analysis are analyzed. Examples of using Cauchy's integral test to determine the convergence and divergence of series are presented. Conclusions are made regarding the practical value of this method in the training of students of technical specialties and further mathematical research.

Keywords: Cauchy's integral test, convergence, divergence, numerical series, mathematical analysis

Вступ

Інтегральна ознака Коші (Cauchy's integral test) – це критерій збіжності рядів, що базується на порівнянні ряду з відповідним інтегралом. Вона особливо корисна для рядів із додатними членами, де можна застосувати неперервну функцію, значення якої відповідають членам ряду. Ознака була запропонована французьким математиком Огюстеном Коші та залишається важливим інструментом у математичному аналізі й навчанні студентів. У доповіді розглянуто теоретичні основи ознаки Коші, умови її застосування та практичні приклади аналізу числових рядів.

Метою дослідження є аналіз інтегральної ознаки Коші як методу визначення збіжності числових рядів та виявлення її ролі у вивченні математичного аналізу студентами технічних спеціальностей.

Результати дослідження

1. Теоретичні основи інтегральної ознаки Коші.

Інтегральна ознака Коші застосовується до рядів виду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n \geq 0$. Якщо існує неперервна, додатна, спадна функція $f(x)$ на $[1, \infty)$, така що $f(n) = a_n$, то:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ збігається} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ збігається.}$$

У випадку розбіжного інтеграла ряд також розбігається. Таким чином, дослідження збіжності ряду зводиться до аналізу відповідного невласного інтеграла.

2. Освітній аспект вивчення ознаки Коші.

Інтегральна ознака Коші є важливим елементом навчання математичного аналізу для студентів технічних спеціальностей. Однак на практиці багато студентів стикаються з певними труднощами.

Неправильне визначення умов застосування ознаки. Часто студенти забувають, що ряд повинен мати додатні члени та відповідати монотонності функції $f(x)$. Ігнорування цих умов може призвести до неправильних висновків щодо збіжності ряду.

Незрозуміле співвідношення ряду та інтеграла. Деякі студенти плутають члени ряду з інтегральною функцією і не розуміють, як побудувати $f(x)$ із заданого ряду.

Інтерпретація результатів інтеграла. Навіть якщо інтеграл обчислено правильно, студенти іноді не розуміють, що збіжність інтеграла означає збіжність ряду, а розбіжність — розбіжність ряду.

Хоча інтегральна ознака Коші є потужним інструментом для визначення збіжності числових рядів, вона має ряд обмежень, які слід враховувати при її застосуванні. Потрібна додатність членів ряду. Ознака працює лише для рядів із додатними членами. Якщо ряд містить від'ємні або змінні за знаком члени, застосування інтегральної ознаки стає некоректним. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ не можна аналізувати безпосередньо за допомогою інтеграла.

Необхідна монотонність функції $f(x)$. Функція $f(x)$, що відповідає членам ряду $f(n) = a_n$, має бути неперервною та монотонно спадною на проміжку від n_0 до ∞ . Якщо функція не монотонна, ознака може дати неправильні результати або взагалі не застосовуватися.

Складність інтегралу. У деяких випадках відповідний інтеграл $\int f(x)dx$ важко обчислити аналітично, особливо якщо функція складна або містить спеціальні функції. Це обмежує практичне застосування ознаки для деяких рядів.

Не дає інформації про умовну збіжність. Інтегральна ознака Коші показує лише абсолютну збіжність ряду. Для рядів з членами, що змінюють знак, необхідно використовувати інші методи, наприклад, ознаку Лейбніца або критерії абсолютної збіжності.

Не завжди дає чітку відповідь у граничних випадках. У випадках, коли інтеграл прямує до нескінченності дуже повільно (наприклад, $\int \frac{1}{x(\ln x)} dx$), ознака Коші може виявитися недостатньою, і для точного визначення збіжності потрібно застосовувати додаткові критерії або модифікації інтегральної ознаки.

Висновки

Інтегральна ознака Коші є потужним методом математичного аналізу для визначення збіжності рядів із додатними членами. Вона дозволяє швидко встановити збіжність або розбіжність ряду через аналіз відповідного інтеграла. Основною перевагою цього критерію є його наочність та зв'язок із поняттям площі під графіком функції. Разом із тим існують обмеження, які потребують застосування інших методів дослідження рядів. В освітньому процесі використання інтегральної ознаки Коші сприяє глибшому розумінню студентами суті збіжності та розвитку аналітичного мислення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wikipedia contributors. Ratio Test – Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio_test?utm_source=proofwiki.org/wiki/Cauchy_Integral_Test
2. Proof Wiki contributors. Cauchy Integral Test – Режим доступу до ресурсу: https://proofwiki.org/wiki/Cauchy_Integral_Test?utm_source=tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/IntegralTest.aspx?utm_source=https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_test_for_convergence?utm_source
3. Lamar University contributors. Integral Test – Режим доступу до ресурсу: https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/IntegralTest.aspx?utm_source=https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_test_for_convergence?utm_source
4. Wikipedia contributors. Integral Test – Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_test_for_convergence?utm_source

Шквира Каріна Олександрівна - студентка групи 1 КН-246, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, e-mail: shkvira.karina@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Shkvira Karina O. - student of group 1KH-246, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, e-mail: shkvira.karina@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com