

ПОБУДОВА КРИВОЇ НА ПЛОЩИНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто математичне моделювання геометричних об'єктів у комп'ютерній графіці. Описані математичні моделі задання, опису та побудови кривих за допомогою параметричних рівнянь. Проаналізовано зокрема побудову зображення сфери та циклічних кривих.

Ключові слова: математична модель, параметричні рівняння, комп'ютерна графіка.

Abstract

This thesis examines the mathematical modeling of geometric objects in computer graphics. Description of the mathematical model of the task, description of the impulse curves using parametric equations. The image of the sphere and cyclic curves has been analyzed.

Key words: mathematical model, parametric equations, computer graphics.

Вступ

Важливим розділом двовимірного та тривимірного моделювання є формування об'єкта засобами комп'ютерної графіки.

Комп'ютерна графіка – складова всіх сучасних комп'ютерних технологій. Графічний інтерфейс став стандартом для програмного забезпечення різних класів, починаючи з операційних систем. Комп'ютерна графіка привертає увагу багатьох спеціалістів із різних галузей знань – програмістів, проектувальників засобів візуалізації, інженерів, фізиків, математиків та ін.[1] Комп'ютерна графіка широко впроваджується в сучасне мистецтво, дизайн та рекламу [3].

Результати досліджень

Графічний об'єкт – це певний малюнок, одержаний за допомогою комп'ютера. Сукупність графічних об'єктів називають зображенням.

Для систем машинної графіки джерелом вхідної інформації є не самі фізичні процеси та об'єкти, а математичні моделі. Математична модель – це сукупність математичних співвідношень, за допомогою яких описуються основні характеристики реального об'єкта. При побудові об'єктів і сцен різної природи у комп'ютерній графіці найчастіше використовують геометричну версію математичного моделювання, тобто кожний елемент сцени розглядається як геометричний об'єкт із певними властивостями, а сцена складається з множини геометричних об'єктів.

За способом представлення геометричних об'єктів можна виділити дві найчастіше використовувані моделі елементів графічних сцен:

- графічні примітиви;
- математичні моделі просторових об'єктів, які задаються рівняннями ліній і поверхонь.

У першій моделі вважається, що сцена формується з відомих геометричних фігур (примітивів): двовимірних (ліній, многокутників тощо) і тривимірних (кубів, пірамід, куль, циліндрів тощо). Примітиви розглядаються як прості неподільні елементи зображення. Тому програмна реалізація побудови сцени полягає в підборі відповідних фігур, які вибираються з бібліотеки примітивів. При використанні бібліотеки примітивів маємо справу з двома рівнями примітивів: двовимірними та тривимірними.

У другому типі моделей геометричні елементи сцени розглядаються як функціональні залежності яскравості точок сцени від координат цих точок, тобто сцену можна побудувати за допомогою аналітичних рівнянь, які описують лінії та поверхні, що задають тіла сцени. Аналітичні моделі широко застосовуються при проектуванні геометричних об'єктів складної форми.

Пряма лінія на площині задається неявним рівнянням $ax + by + c = 0$, або явним рівнянням $y = kx + b$. Відрізок, що визначається двома точками r_0, r_1 , задається векторно-параметричним рівнянням вигляду $r = r_0(1-t) + r_1t$, де $r=(x, y)$, $t \in [0, 1]$.

Параметрична форма задання кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ усуває недоліки функціонального і неявного способів задання кривої. Параметрична форма рівнянь є найбільш універсальною і найбільш розповсюдженою для опису і побудови геометричних об'єктів завдяки різноманітності вибору функцій, що задають рух точки вздовж напрямів степенів вільності. Параметрична форма дозволяє задати замкнені й багатозначні криві. Поверхні можна задати явним рівнянням $z = f(x, y)$, або неявним – $F(x, y, z) = 0$, чи в параметричній формі: $x = x(\tau, t)$, $y = y(\tau, t)$, $z = z(\tau, t)$, $(\tau, t) \in D$. Поверхні першого порядку (площини), що задаються рівнянням $ax+by+cz = d$, та поверхні другого порядку, наприклад еліпсоїд $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ – найбільш широко використовувані поверхні в комп'ютерній графіці оскільки площина є основою наближення поверхні довільної форми, а квадратичні поверхні в багатьох випадках добре передають візуальні образи криволінійних поверхонь [1].

Параметричне рівняння сфери має вигляд $x(\tau, t) = R \sin t \cos \tau$, $y(\tau, t) = R \sin t \sin \tau$, $z(\tau, t) = R \cos t$, $t \in [0, \pi]$, $\tau \in [0, 2\pi]$. Для побудови моделі сфери використовують ікосаедр. Ікосаедр уже є моделлю сфери (всі вершини ікосаедра лежать на сфері), єдиний недолік – мала кількість граней для зображення поверхні сфери.

Для того щоб підвищити реальність зображення сфери кожна грань ікосаедра розбивається на чотири частини (трикутники). Додаткові вершини нових трикутників беруться на серединках сторін грані, (рис 1); – нові вершини проектується на поверхню сфери. Для цього з центра сфери через вершини проводяться промені і відшукуються точки перетину променів із поверхнею сфери. На цих точках будуються нові грані які краще апроксимують сферу; – указані дії повторюються доти, поки не буде досягнуто задовільного зображення сфери. Аналогічним чином можна побудувати моделі циліндра, тора тощо.

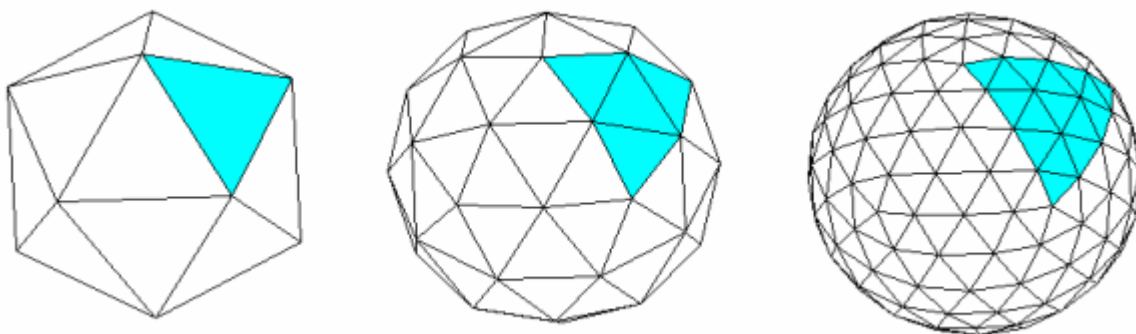


Рис 1. Побудова зображення сфери [1]

Прикладом параметричних кривих є циклічні (циклоїдальні) криві. Простіші циклічні криві на площині утворюються додаванням рівномірного обертального руху точки по колу, можливо, змінного радіуса, з переносним поступальним рухом центра кола по кривій $p_u(t)$ і описуються рівнянням $p(t) = p_u(t) + r(t)c(wt)$, де $r(t)$ – закон зміни радіуса кола, $p = (x, y)$, $c(wt) = (\sin wt, \cos wt)$ – параметричне рівняння одиничного кола із центром у початку координат, w – частота відносного обертання точки й дорівнює кількості обертів точки при зміні t на величину 2π [2] (рис.2).

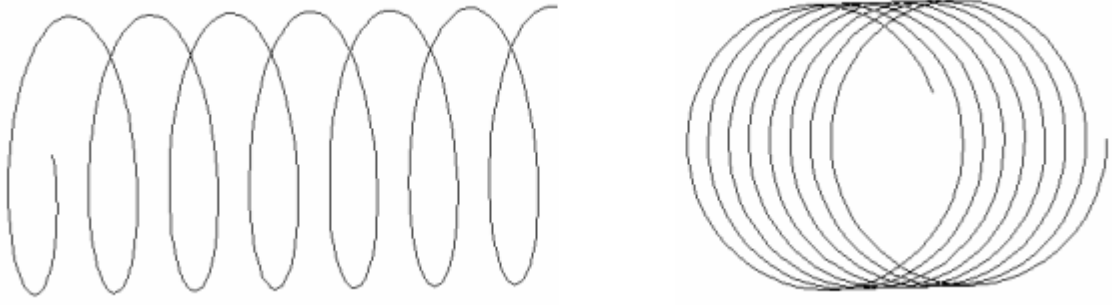


Рис. 2 Циліндрична крива[1]

Розглянемо рівняння деяких циклічних кривих на площині.

Циклоїда – це траєкторія руху точки кола радіусом r , яке котиться по прямій $y = 0$ (рис. 3). Координати (рівняння) циклоїди мають вигляд

$$x(t) = r(t - \sin t), y(t) = r(1 - \cos t), t \geq 0.$$

Епіциклоїда – це траєкторія руху точки кола радіусом r , якщо воно котиться зовні кола радіусом r_0 (рис. 4, а). Її параметричне рівняння:

$$p(t) = (r_0 + r)(\sin t, \cos t) - r(\sin wt, \cos wt), w = (r_0/r + 1), t \geq 0.$$

Гіпоциклоїда – це траєкторія руху точки кола радіусом r , яке котиться всередині кола радіусом r_0 (рис. 4, б). Рівняння гіпоциклоїди має вигляд:

$$p(t) = (r_0 - r)(\sin t, \cos t) + r(-\sin wt, \cos wt), w = (r_0/r - 1), t \geq 0 [2]$$



Рис. 3 Циклоїда

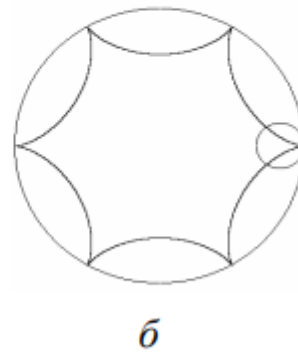
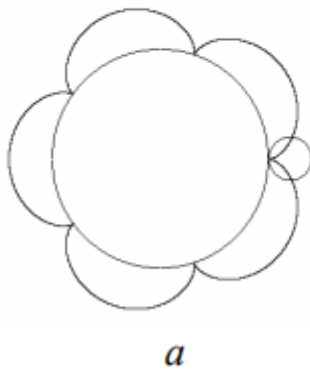


Рис. 4 Циклічні криві: а – епіциклоїда, б – гіпоциклоїда [2]

Висновки

Основними задачами комп'ютерної графіки є візуалізація інформації, тобто створення зображень різних об'єктів і сцен на деякому двовимірному екрані, виконання різних дій із зображеннями, зберігання та передавання графічної інформації [1], що дає можливість звільнити людину від виконання трудомістких графічних операцій.

Математична модель в комп'ютерній графіці — це модель, в якій використовуються математичні формули, рівняння та різні алгоритми для представлення та обробки інформації. Метод побудови кривих на площині за допомогою параметричних рівнянь є зручним методом опису кривих, так як за допомогою цього інструменту можна представляти складні криві. Крім того, цей метод є

універсальним, оскільки його можна застосовувати для будь яких кривих на площині, зокрема прями, кола, еліпси, параболи, спіралі та інші криві.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Маценко В.Г. Комп'ютерна графіка: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2009 – 343 с. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://mmi.stu.cn.ua/wp-content/uploads/2016/09/MatsenkoKompGrafyka.pdf>
2. Маценко В. Г. Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка : навч. посіб. Чернівці : Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2023. 440 с. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://archer.chnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/6844>
3. Комп'ютерна графіка : конспект лекцій для студентів усіх форм навчання спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки» та 123 «Комп'ютерна інженерія» з курсу «Комп'ютерна графіка» / Укладач: Скиба О.П.- Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/27541/КОНСПЕКТ%20ЛЕКЦІЙ%20комп%20графіка.pdf>

Курган Денис Олександрович – студент групи 2КІ-24б, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: deniyak96@gmail.com

Хом'юк Ірина Володимирівна – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Kurhan Denys Oleksandrovych – student of group 2KI-24b, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske highway, 95, e-mail: deniyak96@gmail.com

Irina V. Khomyuk – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiraivh@gmail.com