

Застосування диференціальних рівнянь у фінансовому аналізі біржових коливань

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Стохастичні диференціальні рівняння є фундаментальним математичним апаратом для моделювання хаотичної динаміки фінансових ринків. Вони забезпечують потужні методи для кількісного опису та прогнозування біржових коливань, оцінки ризиків та визначення справедливої вартості складних фінансових інструментів. Такі моделі, як геометричний броунівський рух та рівняння Орнштейна-Уленбека, дозволяють формалізувати ключові ринкові явища - трендову складову, волатильність та середньореверсійні властивості. Найвищим практичним досягненням застосування цих методів стало виведення рівняння Блека-Шоулза, яке революціонізувало світ фінансів та започаткувало сучасну теорію оцінки похідних інструментів. Незважаючи на певні обмеження, апарат диференціальних рівнянь залишається незамінним інструментом у арсеналі сучасного фінансового аналітика та квантового дослідника.

Ключові слова: диференціальні рівняння, фінансовий аналіз, біржові коливання, стохастичні диференціальні рівняння, модель Блека-Шоулза, геометричний броунівський рух, волатильність.

Abstract

Stochastic differential equations are a fundamental mathematical tool for modeling the chaotic dynamics of financial markets. They provide powerful methods for quantitatively describing and forecasting stock market fluctuations, assessing risks, and determining the fair value of complex financial instruments. Models such as geometric Brownian motion and the Ornstein-Uhlenbeck equation allow us to formalize key market phenomena—the trend component, volatility, and mean-reversion properties. The highest practical achievement in the application of these methods was the derivation of the Black-Scholes equation, which revolutionized the world of finance and initiated the modern theory of derivative valuation. Despite certain limitations, the apparatus of differential equations remains an indispensable tool in the arsenal of the modern financial analyst and quantum researcher.

Keywords: Differential equations, financial analysis, stock market fluctuations, stochastic differential equations, Black-Scholes model, geometric Brownian motion, volatility.

Вступ

Диференціальні рівняння складають фундаментальну основу для математичного моделювання динамічних процесів у фінансових ринках. Вони надають потужний апарат для кількісного опису та прогнозування біржових коливань, оцінки ризиків та визначення справедливої вартості складних фінансових інструментів. Завдяки використанню стохастичних диференціальних рівнянь вдається формалізувати ключові ринкові характеристики - трендову складову, волатильність та явище середнього відновлення. Історично розвиток фінансової математики пройшов шлях від емпіричних спостережень до строгих математичних моделей, кульмінацією чого стало виведення рівняння Блека-Шоулза - справжньої революції у світі фінансів. Сучасні тенденції, зокрема розвиток моделей зі стохастичною волатильністю та застосування методів машинного навчання, продовжують розширювати можливості класичних підходів і відкривають нові горизонти у фінансовому моделюванні.

Результати дослідження

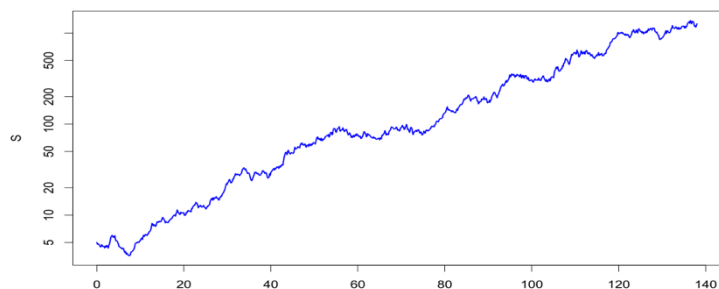


Рисунок 1 Траєкторія ціни активу (Геометричний броунівський рух)

Математичний апарат диференціальних рівнянь у фінансах.

Стохастичні диференціальні рівняння (СДР) визначають динаміку зміни цін фінансових активів у часі, враховуючи випадкові фактори. Основу моделювання складає геометричний броунівський рух, де приріст ціни активу розкладається на детермінований тренд (дрейф) та

стохастичну компоненту (дифузії). Використання леми Іто дозволяє оперувати функціями від випадкових процесів, що є необхідним для переходу від динаміки базового активу до вартості похідних інструментів. Класичні моделі добре описують нормальні ринкові умови, проте при моделюванні кризових явищ стандартна схема може зустрічати обмеження, що стимулює застосування процесів зі стрибками (рис. 1).

Моделювання ціноутворення похідних інструментів. Рівняння в частинних похідних (РЧП) використовуються для знаходження справедливої ціни опціонів та ф'ючерсів — це, насамперед, рівняння Блека-Шоулза. За допомогою граничних умов та заміни змінних це параболічне рівняння зводиться до рівняння теплопровідності, що дозволяє отримати аналітичний розв'язок. Традиційні аналітичні формули забезпечують швидкість розрахунків, але іноді стикаються з обмеженнями при роботі з екзотичними опціонами, що спонукає до використання чисельних наближень.

Аналіз та управління ризиками. «Греки» (The Greeks) — це частинні похідні від функції ціни опціону за різними параметрами, які визначають чутливість портфеля до ринкових змін.

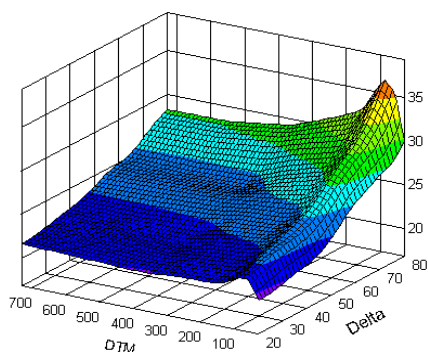


Рисунок 2 Поверхня волатильності

Дельта Δ — показує швидкість зміни ціни опціону відносно ціни базового активу.

Гамма Γ — характеризує прискорення зміни ціни (похідна другого порядку), важлива для хеджування великих рухів ринку.

Тета Θ — відображає часовий розпад вартості інструменту.

Вега ν — визначає чутливість ціни до зміни волатильності ринку, що є критичним для торгівлі в періоди нестабільності.

Сучасні розширення класичних моделей. Оскільки припущення про постійну волатильність у класичній теорії часто не виконується на практиці, використовуються моделі стохастичної волатильності (наприклад, модель Хестона). Ці моделі описують волатильність як окремий випадковий процес, що корелює з ціною активу (рис. 2), дозволяючи пояснити такі ефекти, як «посмішка волатильності». Також застосовуються рівняння Орнштейна-Уленбека для моделювання процесів із поверненням до середнього значення, що є актуальним для відсоткових ставок та сировинних товарів.

Чисельні методи розв'язку. Для складних фінансових контрактів, де неможливо отримати аналітичну формулу, застосовуються скінченно-різницеві методи (Finite Difference Method) для розв'язання РЧП на сітці. Метод Монте-Карло використовується для симуляції тисяч можливих траєкторій руху ціни на основі дискретизації стохастичних диференціальних рівнянь (схема Ейлера-Маруями). Сучасні обчислювальні підходи дозволяють комбінувати ці методи з алгоритмами машинного навчання для прискорення калібрування моделей на реальних ринкових даних.

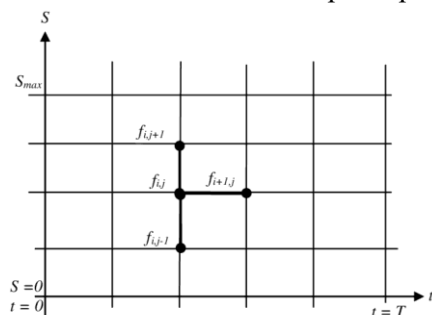


Рисунок 3 Сітка методу скінченних різниць для оцінки опціону

Схема ілюструє процес дискретизації, де неперервний простір «ціна-час» замінюється на систему вузлів. Розрахунок вартості похідного інструменту виконується методом зворотної індукції: від моменту експірації T , де виплата відома, до поточного моменту t_0 . Такий підхід дозволяє ефективно оцінювати інструменти зі складними умовами (наприклад, американські опціони з можливістю дострокового виконання), перевіряючи оптимальність дій інвестора у кожному вузлі сітки, та забезпечує стійкість розв'язку при коректному виборі кроку.

Висновок

Диференціальні рівняння, зокрема стохастичні, становлять фундаментальний математичний апарат для аналізу та моделювання фінансових ринків. Вони забезпечують потужні інструменти для кількісного опису динаміки цін, оцінки ризиків та визначення справедливої вартості похідних інструментів. Завдяки використанню моделей геометричного броунівського руху, рівняння Орнштейна-Уленбека та, насамперед, рівняння Блека-Шоулза, вдається формалізувати ключові ринкові явища - трендову динаміку, волатильність та середнє відновлення. Сучасні методи фінансового моделювання, такі як моделі зі стохастичною волатильністю, чисельні методи розв'язку та інтеграція з машинним навчанням, значною мірою спираються на апарат диференціальних рівнянь, що підтверджує їхню незамінну роль у розвитку фінансової науки та практики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник для студентів університетів. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
2. Халл Дж. К. Опціони, ф'ючерси та інші похідні цінні папери (8-ме вид.). Prentice Hall, 2011.
3. Оксендаль Б. Стохастичні диференціальні рівняння: Вступ із застосуваннями (6-те вид.). Springer, 2013.
4. Шрив С. Стохастичне числення для фінансів II: моделі у неперервному часі. Springer, 2004.
5. Вілмотт П. Кількісні фінанси (2-ге вид.). Wiley, 2007.

Ходорович Даниїл Володимирович – студент групи 2 КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: icysanmen1923@gmail.com

Гаврилюк Владислав Олегович – студент групи 2 КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vlad1256a@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Khodorovych Daniil V. - student of group 2KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: icysanmen1923@gmail.com

Gavryliuk Vladyslav O. - student of group 2KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vlad1256a@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95 e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com