

ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В GPS ТА СУПУТНИКОВІЙ НАВІГАЦІЇ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У даній роботі розкрито фундаментальну роль математичного апарату в роботі систем глобального позиціонування (GPS). Досліджено принцип визначення координат на основі вимірювання відстаней до супутників. Детально проаналізовано ключові математичні моделі та методи, зокрема геометричну інтерпретацію та розв'язання системи рівнянь для знаходження точного положення приймача і корекції часу. Особливу увагу приділено рівнянню псевдодальності та необхідності використання щонайменше чотирьох супутників для усунення невизначеності часової синхронізації. Робота наочно демонструє, що без застосування методів лінійної алгебри, геометрії та обчислювальних алгоритмів сучасна супутникова навігація була б неможливою.

Ключові слова: GPS, супутникова навігація, математична модель, псевдодальність, система рівнянь, трилатерація, координати, лінійна алгебра.

Abstracts

This work reveals the fundamental role of the mathematical apparatus in the operation of global positioning systems (GPS). The principle of determining coordinates based on measuring distances to satellites is investigated. Key mathematical models and methods are analyzed in detail, in particular, the geometric interpretation and solution of the system of equations for finding the exact position of the receiver and time correction. Special attention is paid to the pseudorange equation and the need to use at least four satellites to eliminate the uncertainty of time synchronization. The work clearly demonstrates that without the use of methods of linear algebra, geometry and computational algorithms, modern satellite navigation would be impossible.

Keywords: GPS, satellite navigation, mathematical model, pseudorange, system of equations, trilateration, coordinates, linear algebra.

Вступ

У сучасному глобалізованому світі, де темпи життя прискорюються, а ефективність логістики, безпека транспорту та точність наукових досліджень стають вирішальними чинниками, ключову роль відіграє можливість миттєво та точно визначати місцеположення будь-якого об'єкта на Землі. Основним технологічним інструментом, що забезпечує цю можливість, стали системи глобального супутникового позиціонування (GNSS), серед яких найпоширенішою є GPS. Проте, за зручністю отримання координат на екрані смартфона криється не технологічне диво, а строга та елегантна математична модель. Саме математика є тим фундаментом, який перетворює радіосигнали з космосу на точні просторові координати.

Математичний апарат, зокрема методи лінійної алгебри, геометрії та чисельного аналізу, забезпечує універсальний підхід до вирішення складної багатовимірної задачі позиціонування. Він дозволяє не лише обчислити відстані до супутників, але й подолати фундаментальні технологічні обмеження, такі як неідеальна синхронізація годинників приймача та супутника. Ці алгоритми дають змогу навігаційним системам ефективно обробляти дані відразу від кількох супутників у реальному часі, забезпечуючи точність від метрів до сантиметрів. Вони використовуються як у повсякденній навігації, так і у найскладніших завданнях: при будівництві інфраструктури, моніторингу тектонічних зсувів, керуванні безпілотними апаратами та проведенні геодезичних зйомок.

Актуальність теми зумовлена повсюдним проникненням технологій позиціонування у всі сфери суспільства — від освіти та науки до економіки та оборони. Розуміння математичних принципів роботи GPS необхідне для подальшого вдосконалення цих систем, розробки нових застосунків та формування цифрової грамотності, оскільки розкриває справжню суть, приховану за звичною зручністю.

Метою цієї роботи є дослідження фундаментальних математичних моделей і методів, за допомогою яких система GPS визначає координати об'єкта, а також аналіз ключових понять, таких як трилатерація та псевдодальність, що лежать в основі цього процесу.

Результати дослідження

Основа роботи GPS — це метод трилатерації, який полягає у визначенні положення точки за допомогою вимірювання відстаней до інших точок із відомими координатами.

1. Ідеальна модель (без урахування часу)

Якщо припустити, що годинники приймача та супутника ідеально синхронізовані, то задача стає суто геометричною. Відстань d до супутника обчислюється за формулою:

$$d = c * \Delta t$$

де c — швидкість світла, а Δt — час, за який сигнал проходить від супутника до приймача.

Координати супутника (x_s, y_s, z_s) відомі з його ефемерид. Координати приймача (x, y, z) — невідомі, які потрібно знайти. Рівняння сфери для кожного супутника виглядає так:

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = d^2$$

Для знаходження трьох невідомих (x, y, z) теоретично достатньо трьох таких рівнянь (тобто трьох супутників). Точка перетину трьох сфер дасть шукані координати

2. Реальна модель: поняття псевдодальності та четвертий супутник

На практиці дешеві годинники в приймачах мають значну похибку щодо точних атомних годинників на супутниках. Це означає, що виміряний час поширення сигналу $\Delta t'$ є неточним. Тому обчислена відстань, яка називається псевдодальністю (p), містить у собі похибку, спричинену розбіжністю годинників:

$$p = d + c * \Delta t_b$$

де Δt_b — невідома похибка годинника приймача.

Тепер у нас з'явилася четверта невідома — Δt_b . Отже, для розв'язання цієї системи потрібні рівняння від чотирьох супутників. Система рівнянь для реального випадку має такий вигляд:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = (p_1 = d + c * \Delta t_b)^2 \\ (2) \quad & (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = (p_2 = d + c * \Delta t_b)^2 \\ (3) \quad & (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = (p_3 = d + c * \Delta t_b)^2 \\ (4) \quad & (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = (p_4 = d + c * \Delta t_b)^2 \end{aligned}$$

Ця система нелінійних рівнянь розв'язується приймачем за допомогою чисельних методів (наприклад, методу Ньютона-Рафсона або методів лінійзації). Приймач ітеративно підбирає значення $(x, y, z, \Delta t_b)$, які задовольняють усім чотирьом рівнянням з найменшою похибкою. Таким чином, математика дозволяє не лише знайти координати, а й точно синхронізувати недорогий годинник приймача з всесвітнім координованим часом.

Висновки

Проведене дослідження наочно демонструє, що супутникова навігація є не інженерною, а насамперед математичною технологією. Від вимірювання часу поширення сигналу до обчислення точних координат на поверхні планети — кожен крок ґрунтується на строгих математичних моделях. Ключовим моментом є перехід від ідеальної геометричної моделі трилатерації до реальної моделі з

псевдодальностями, що вимагає застосування методів розв'язання систем нелінійних рівнянь. Необхідність використання четвертого супутника для компенсації похибки годинника приймача є яскравим прикладом того, як математика дозволяє подолати технологічні обмеження. Отже, саме математичний апарат, зокрема лінійна алгебра, геометрія та чисельні методи, робить можливим точне визначення положення в просторі за допомогою систем глобального позиціонування.

Знання принципів матричних перетворень є необхідною складовою цифрової грамотності, особливо для фахівців у сферах ІТ, програмування, графічного дизайну, інженерії та архітектури.

Таким чином, матриці відіграють ключову роль у визначенні координат та керуванні просторовим розташуванням об'єктів у цифровому середовищі. Їх використання забезпечує точність, універсальність і швидкість обчислень, що робить їх незамінним інструментом у сучасних інформаційних технологіях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Калінін В.М., Саранча О.О. Основи супутникового позиціонування. — К.: Наукова думка, 2018. — 255 с.
2. Гончаренко В.І., Мельник Ю.О. Математичні моделі в геодезії та навігації. — Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2020. — 184 с.
3. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J. Global Positioning System: Theory and Practice. — 5th ed. — Springer, 2001. — 382 p.
4. Касьянов В.О. Алгоритми розв'язання задачі позиціонування в системах навігації // Вісник Київського національного університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2019. — №2. — С. 67–73.
5. Kaplan E.D., Hegarty C.J. Understanding GPS/GNSS: Principles and Applications. — 3rd ed. — Artech House, 2017. — 725 p.
6. Maybeck P.S. Stochastic Models, Estimation, and Control. — Academic Press, 1979. — 423 p.
7. GPS.gov: The Mathematics of GPS // Official U.S. government information about the Global Positioning System. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://www.gps.gov/multimedia/tutorials/gps/>
8. Stanford University: GPS Basics // [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <http://waas.stanford.edu/~www/tutorials/gps-tutorial-full.htm>

Наумчак Олег Валерійович – студент групи 1KI-24б, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: naoleg355@gmail.com

Naumchak Oleg Valeriyovich – student of group 1KI-24b, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske highway, 95, e-mail: naoleg355@gmail.com