

РОЛЬ ОЗНАКИ ДАЛАМБЕРА У ТЕОРІЇ НЕСКІНЧЕННИХ РЯДІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді досліджено роль ознаки Даламбера в контексті теорії нескінченних числових рядів. Проаналізовано її математичне формулювання, умови застосування, а також значення цього критерію для перевірки збіжності рядів. Визначено її переваги, обмеження та практичну роль у математичному аналізі.

Ключові слова: ознака Даламбера, нескінченний ряд, збіжність, критерій збіжності, математичний аналіз.

Abstract

The report examines the role of the D'Alembert criterion in the theory of infinite numerical series. The mathematical formulation, conditions of applicability, and the importance of this test for checking convergence are analyzed. Its advantages, limitations, and practical role in mathematical analysis are determined.

Keywords D'Alembert test, infinite series, convergence, convergence criterion, mathematical analysis.

Вступ

Нескінченні ряди відіграють фундаментальну роль у розвитку математичного аналізу, оскільки саме через них можливо описувати та досліджувати процеси, які не можуть бути подані у вигляді скінченних моделей. Ряди природним чином виникають у задачах математичної фізики, теорії коливань, квантовій механіці, обчислювальній математиці, теорії функцій та багатьох інших галузях, де складні явища потребують точного аналітичного опису. Одним з ключових питань при цьому є визначення збіжності ряду — тобто встановлення, чи наближається його часткова сума до певного скінченного значення. Для розв'язання цієї проблеми впродовж століть було розроблено низку критеріїв збіжності, серед яких одним із найвпливовіших став критерій відношення, або ознака Даламбера.

Запропонований Жаном Ле Рондом д'Аламбером у XVIII столітті, цей критерій став результатом поєднання аналітичної інтуїції та філософських ідей про природу нескінченності. Простота формулювання, універсальність застосування та можливість дати відповідь без прямого обчислення суми ряду зробили ознаку Даламбера одним із найважливіших інструментів класичного та сучасного аналізу. У багатьох типах рядів — зокрема степеневих та таких, що містять факторіальні чи експоненційні компоненти — вона дозволяє майже миттєво визначити поведінку послідовних членів і зробити висновок щодо збіжності.

Метою даної роботи є комплексний аналіз ролі ознаки Даламбера у теорії нескінченних рядів: від історичного становлення цього критерію до його математичної формалізації і сучасних узагальнень. У роботі розглянуто не тільки класичний варіант ознаки, але й її поглиблені модифікації (Раабе, Куммер, m-ratio test), що значно розширюють сферу застосування критерію у сучасних дослідженнях. Такий підхід дає можливість всебічно оцінити теоретичну та практичну значущість ознаки Даламбера в контексті розвитку математичного аналізу.

Результати дослідження

1. Історичний контекст і формування концепції

Жан Ле Ронд д'Аламбер (1717–1783) працював у період стрімкого розвитку математичного аналізу й активного зближення математики з механікою та філософією епохи Просвітництва. Науковці того часу прагнули створити точні критерії для оцінювання збіжності нескінченних рядів, що виникали в задачах гідродинаміки, коливань струни, оптики та небесної механіки [1]. Саме в цьому контексті д'Аламбер запропонував метод порівняння сусідніх членів ряду

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

який давав змогу встановити поведінку ряду без необхідності обчислювати його суму.

Його підхід органічно спирався на концепцію потенційної нескінченності, розроблену ще Аристотелем, згідно з якою нескінченність розуміється як процес, що може продовжуватися безмежно, але ніколи не існує як завершена величина. Така філософська основа дозволяла уникнути парадоксів Зенона та створювала фундамент для подальших розробок у математичній логіці. Д'Аламбер послідовно використовував ці ідеї при дослідженні механічних та хвильових процесів, де природно виникали нескінченні ряди як математична модель.

Подальше вдосконалення ознаки відбулося завдяки Огюстену Коші та Карлу Вейерштрассу, які надали поняттю границі сувору формалізацію і заклали основу аналітичного апарату для оцінки збіжності та радіуса збіжності степеневих рядів [2, 3]. Таким чином, ознака д'Аламбера стала результатом взаємодії філософської традиції, математичної строгості й потреб прикладних наук епохи Просвітництва.

2. Математичне формулювання та класичні приклади застосування

Нехай задано нескінченний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \neq 0$$

Ознака Даламбера стверджує, що якщо існує границя

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

то:

якщо $L < 1$, ряд збіжний абсолютно;

якщо $L > 1$, ряд розбіжний;

якщо $L = 1$ (або межа не існує), то ознака не дає визначеного результату (вона є недостатньою).

У більш формальному вигляді: якщо існує число $\rho < 1$ таке, що $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho$ для всіх великих n , тоді ряд збіжний; якщо $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ для всіх великих n , то ряд розбіжний [2].

Прикладом служить ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Тоді $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Обчислимо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1}$$

При $n \rightarrow \infty$ маємо

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

Отже, цей ряд збігається для всіх дійсних x [1, 3]. Саме ця властивість забезпечує фундаментальність ознаки Д'Аламбера в аналізі степеневих рядів і розкладів Тейлора, де ratio-тест дозволяє визначати радіус збіжності та забезпечує точність математичних моделей у фізиці й техніці [4].

Сучасний аналіз аналітичних функцій використовує ознаку Д'Аламбера як базовий інструмент для оцінки збіжності функціональних рядів, які описують коливальні процеси, електромагнітні поля чи задачі квантової механіки [5].

3. Сучасні узагальнення та методологія

Хоч ознака Д'Аламбера є базовим інструментом, вона має обмеження: при $L = 1$ ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У сучасних дослідженнях було розроблено кілька узагальнень та альтернативних тестів. Тест Раабе вводить величину

$$\rho_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right),$$

і, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho$, то ряд збігає при $\rho > 1$, і розбігає при $\rho < 1$. Куммер запропонував ще ширше узагальнення, в якому порівняння проводиться не з фіксованими константами, а з послідовністю $\{b_n\}$, що дозволяє охоплювати ряди, недоступні класичному ratio-тесту. У сучасній літературі також розглядається m-та ознака співвідношення (m-ratio test), яка дозволяє аналізувати випадки "межових" рядів, де традиційні методи не дають результату.

Методологія сучасного аналізу передбачає послідовне використання: спочатку класичного тесту Д'Аламбера, потім — точніших узагальнень (Раабе, Куммер, m-ratio), а у складних випадках — комбінованих методів, які поєднують теорію границь, асимптотику та чисельні обчислення [6, 7]. Узагальнення ознаки активно застосовуються у функціональному аналізі, спектральній теорії, аналітичній теорії диференціальних рівнянь та математичній фізиці, де ряди часто мають складну структуру і вимагають чутливих інструментів для вивчення збіжності.

Таким чином, ознака Д'Аламбера, попри свій класичний характер, залишається ключовим елементом сучасного математичного аналізу, поєднуючи історичні ідеї, строгі аналітичні методи та сучасні узагальнення, що значно розширюють сферу її застосувань [1–7].

Висновок

Ознака Даламбера посідає особливе місце серед критеріїв збіжності нескінченних рядів завдяки своїй універсальності, простоті та здатності давати швидкі й достовірні результати для широкого класу задач. Вона стала невід'ємною частиною аналітичного апарату, яким користуються математики, фізики, інженери та дослідники у прикладних галузях для побудови моделей, дослідження складних функцій і оптимізації обчислювальних процесів.

Ознака Даламбера дозволяє оцінювати тенденції зміни сусідніх членів ряду, що забезпечує її ефективність при аналізі рядів із факторіальними та експоненційними компонентами, а також при роботі зі степеневими рядами, де вона допомагає визначити радіус збіжності. Класичний критерій відношення став не лише зручним інструментом, але й методологічною основою для подальших узагальнень, які виникли у відповідь на потребу аналізувати ряди, для яких стандартний тест виявляється недостатнім.

Узагальнення Раабе, Куммера та сучасні m-ratio методи демонструють, що ідеї д'Аламбера продовжують впливати на розвиток аналізу. Вони дозволяють досліджувати "межові" випадки, де поведінка ряду вимагає більш глибокого підходу, і тим самим забезпечують точність і надійність математичних висновків у складних аналітичних завданнях.

Отже, ознака Даламбера — це не лише класичний інструмент для перевірки збіжності. Вона є концептуальною основою сучасної теорії рядів, що поєднує історичну спадщину, строгі методи математичного аналізу та сучасні дослідницькі підходи. Її роль у математичних дослідженнях і практичних застосуваннях залишається ключовою, а розвиток пов'язаних із нею узагальнень свідчить про тривалу наукову цінність та актуальність цього критерію у структурі математичної науки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Encyclopaedia Britannica — Jean le Rond d'Alembert. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://www.britannica.com/biography/Jean-Le-Rond-dAlembert>
2. Wikipedia — Ratio test. [Електронний ресурс] — Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio_test
3. Paul's Online Math Notes — Ratio Test. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/ratiotest.aspx>
4. Wolfram MathWorld — Analytic Function. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://mathworld.wolfram.com/AnalyticFunction.html>
5. Christopher Hammond — The Case for Raabe's Test. arXiv. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1801.07584>
6. Wolfram MathWorld — Kummer's Test. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <https://mathworld.wolfram.com/KummersTest.html>
7. Tord Sjödín — A Short and Unified Proof of Kummer's Test. arXiv. [Електронний ресурс] Режим

доступу: <https://arxiv.org/abs/1802.09858>

Сніжинська Влада Володимирівна — студентка групи 3KN-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vladasnizhynska@gmail.com

Галаган Руслана Вікторівна — студентка групи 3KN-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: 1977vgalagan@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Snizhynska Vlada V. — student of group 3KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : vladasnizhynska@gmail.com

Halahan Ruslana V. — student of group 3KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia,, email : 1977vgalagan@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95 e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com