УДК [519.612:004] (043.2)

Д.О. Загородній
М.Б. Ковальчук

СТЕПЕНЕВІ РЯДИ ТА РЯД ТЕЙЛОРА

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді розглянуто степеневі ряди та їхнє головне застосування – ряд Тейлора. Визначено поняття збіжності та радіуса збіжності для степеневих рядів. Висвітлено практичну значущість ряду Тейлора як інструменту для апроксимації складних функцій та їхнього використання в обчислювальній математиці.

Ключові слова: степеневий ряд, ряд Тейлора, збіжність, апроксимація функцій, многочлен.

Abstract

The report describes power series and their main application – the Taylor series. The concepts of convergence and radius of convergence for power series are defined. The practical significance of the Taylor series as a tool for approximating complex functions and their use in computational mathematics is highlighted.

Keywords: power series, Taylor series, convergence, function approximation, polynomial.

Вступ

Протягом століть математики прагнули наближати складні функції за допомогою простих, легко обчислюваних виразів, таких як многочлени. Степеневий ряд став ключовим інструментом для вирішення цієї задачі, забезпечивши точний та універсальний метод.

Метою роботи є дослідження теоретичних засад степеневих рядів, встановлення умов їхньої збіжності та детальний аналіз ряду Тейлора.

Результати дослідження

Степеневі ряди є об'єктом вивчення функціональних рядів і становлять собою потужну основу для чисельного та аналітичного моделювання. Основна увага при досліджені степенвих рядів приділяється визначенню області збіжності. Встановлення радіуса збіжності R є критичним, оскільки саме він визначає інтервал $(x_0 - R, x_0 + R)$, в межах якого степеневий ряд коректно збігається до тієї чи іншої функції $f(x)$. Для знаходження R найчастіше застосовують ознаки Коші або Д'Аламбера, які дозволяють оцінити наскільки швидко члени ряду зменшуються.

Ключовим практичним застосуванням, що походить від теорії степеневих рядів, є ряд Тейлора. Він є нескінченною сумою, де члени обчислюються з використанням значень похідних функції в одній конкретній точці x_0:.Він здатен наближати складні функції за допомогою нескінченного многочлена рис. 1 . Коефіцієнти цього ряду строго визначаються похідними функцій у вибраній точці x_0,що гарантує, що ряд Тейлора показує поведінку вихідної функції в околі цієї точки. Це дозволяє аналізувати функції та виконувати з ними операції, які були б не можливі у їхній початковій формі. Ряд Маклорена є його частинним випадком, де розкладання відбувається навколо точки x_0 = 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Рис. 1 – Загальна формула ряду Тейлора

Ряд Маклорена є частинним, але найбільш важливим випадком ряду Тейлора, що отримується, коли точка розкладання фіксована x_0= 0. Саме ряди Маклорена для фундаментальних функцій, таких як e^x $\sin x$ та $\cos x$ стали класичними та найчастіше використовуються у прикладній математиці. Їхня ключова роль полягає в тому, що вони є базовими будівельними блоками для чисельних методів, забезпечуючи точне наближення цих функцій. Ці ряди активно застосовують в алгоритмах для вирішення складних математичних задач та моделювання процесів.

Використання ряду Тейлора надає значні методології переваги, зокрема у сфері обчислювальної математики. Заміна складних функцій на многочлени дозволяє перетворити обчислення, які вимагають складних алгоритмів на прості арифметичні операції. Операції інтегрування та диференціювання функцій, розкладених в ряд Тейлора, зводяться до по-членних операцій над многочленами, що значно спрощує аналітичні процеси, особливо при роботі з функціями, первісна яких не виражається через елементарні функції. Наприклад, інтеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ може бути знайденим лише шляхом розкладанням функції у ряд Тейлора.

Водночас застосування рядів Тейлора має свої обмеження, які необхідно враховувати в практичних розрахунках. При роботі ми завжди використовуємо скінченну суму, тобто многочлен Тейлора, замість нескінченного ряду. Ця операція має похибку, яка називається залишковим членом ряду. Для забезпечення необхідної точності розрахунків критично важливо вміти оцінювати цей залишковий член, зазвичай за формулою Лагранжа. Нехтування оцінкою похибки може призвести до значних розбіжностей між теоретичною моделлю та фактичними обчисленнями, особливо на краю інтервалу збіжності.

Викладачі повинні розвивати цифрові компетентності для ефективного впровадження технологій в освітній процес. Тому існує велика кількість методичних аспектів, зокрема: розробка електронних навчальних матеріалів включає створення інтерактивних ресурсів, що покращують засвоєння матеріалу та сприяють самостійній роботі студентів; використання платформ для управління навчальним процесом – це дозволяє мати постійну комунікацію з викладачами та студентами, проводити тести та оцінювання, зберігати навчальні матеріали

Таким чином, степеневі ряди не просто є математичними теоретичним об’єктом, а становлять собою фундаментальний інструмент для кількісного опису процесів у науці та техніці. Їхня здатність моделювати функції за допомогою простих многочленів лежить в основі чисельних методів, які використовуються для розв’язання диференціальних рівнянь, обробки сигналів та комп’ютерного моделювання фізичних систем. Історично саме відкриття цих рядів, дозволили математиці та інженерії перейти на якісно новий рівень точності та обчислювальної ефективності. Розуміння як збіжності, так і ймовірність похибок є ключем до їх успішного та коректного застосування у всіх прикладних галузях.

Висновки

Степеневі ряди та ряд Тейлора є фундаментальними інструментами аналізу, які дозволяють замінювати на прості многочлени. Це дозволяє комп’ютерам дуже точно їх обчислювати. Вони незамінні у чисельних методах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Копорулін В.Л., Моссаковська Л.В. Степеневі ряди та їх застосування: Навч.посібник. — Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. — 88 с.
2. Михайлова Т. Ф., Максименкова Ю. А., Нечай І. В. Математичний аналіз. Ряди. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Частина II : навч. посіб. / Укр. держ. ун-т науки і технологій. Дніпро, 2025. 116 с. ISBN 978-617-8314-53-8 (PDF).

Загородній Денис Олегович — студент групи 1КН-24 б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: zagorodniy.do.vinn@gmail.com

Науковий керівник: ***Ковальчук Майя Борисівна*** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Zagorodnyi Denys O. - student of group 4KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: *zagorodniy.do.vinn@gmail.com*

Supervisor: ***Kovalchuk Maya B.*** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com