

РЯД ТЕЙЛОРА ТА ЙОГО ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді розглядаються основні принципи та практичне застосування ряду Тейлора. Представлено теоретичні основи розкладу функції в степеневий ряд навколо певної точки та умови його збіжності, включаючи формулу залишку. Особлива увага приділяється практичному значенню ряду Тейлора, зокрема його використанню для наближених обчислень значень функцій (апроксимація), розв'язання диференціальних рівнянь, а також застосуванням у фізиці (наприклад, у теорії коливань) та інженерії. Доповідь охоплює приклади використання ряду Тейлора в комп'ютерній графіці та чисельних методах, де він слугує основою для побудови ефективних алгоритмів.

Ключові слова: ряд Тейлора, степеневий ряд, апроксимація функцій, наближені обчислення, диференціальні рівняння, фізика, комп'ютерна графіка, чисельні методи.

Abstract

The report discusses the basic principles and practical applications of the Taylor series. The theoretical foundations of the expansion of a function into a power series around a certain point and the conditions for its convergence, including the residue formula, are presented. Special attention is paid to the practical significance Taylor series, in particular its use for approximate calculations of function values (approximation), solving differential equations, as well as applications in physics (for example, in the theory of oscillations) and engineering. The report covers examples of the use of Taylor series in computer graphics and numerical methods, where it serves as a basis for constructing efficient algorithms.

Keywords: Taylor series, power series, function approximation, approximate calculations, differential equations, physics, computer graphics, numerical methods.

Вступ

Ряд Тейлора — це один із фундаментальних інструментів математичного аналізу, який дає можливість представити складну функцію у вигляді нескінченної суми простіших доданків — похідних цієї функції, взятих у певній точці. Іншими словами, будь-яку гладку функцію можна «наблизити» многочленом, точність якого залежить від кількості врахованих членів ряду. Такий підхід дозволяє суттєво спростити обчислення та аналіз функцій, які у початковому вигляді є незручними або громіздкими.

Основна ідея ряду Тейлора полягає у тому, що функцію можна локально замінити її поліномом, зберігши при цьому бажану точність. Чим ближче ми перебуваємо до точки розкладу, тим точнішим стає наближення. Саме тому цей інструмент відіграє важливу роль у фізиці, інженерії, програмуванні та багатьох інших галузях. Степеневі ряди завдяки своїм властивостям і відносній простоті знайшли широке застосування як зручний інструмент теоретичних і прикладних досліджень не тільки практично в усіх розділах математики і фізики, а й в багатьох галузях техніки і природознавства. Вони розглядаються як границя многочленів при прямуванні їх степенів до нескінченності і володіють майже всіма властивостями многочленів з тією різницею, що для багатьох рядів ці властивості виконуються не для всіх значень аргументу, а лише для деякої обмеженої їх множини.

Мета роботи – проаналізувати практичне застосування рядів Тейлора.

Результати дослідження

1. Спрощення фізичних моделей. У фізиці часто маємо справу зі складними залежностями, які важко аналізувати у вихідному вигляді. Ряд Тейлора дозволяє замінити такі функції наближеними поліномами. Фізичні явища часто описуються складними функціональними залежностями, які важко

аналізувати або розв'язувати в точному вигляді. Багато рівнянь у механіці, оптиці, електродинаміці, квантовій фізиці й термодинаміці містять тригонометричні, експоненційні чи логарифмічні функції. Саме тому у фізиці широко використовують ряд Тейлора, який дозволяє перетворити такі залежності на прості багато члени (поліноми), що легко обчислюються та дають точні результати у певних діапазонах. У багатьох фізичних моделюваннях важливо розглядати системи поблизу стану рівноваги або за малих відхилень. Тоді кути є дуже малими (меншими за кілька градусів), і тригонометричні функції можна замінити першими членами ряду Тейлора.

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Наприклад:

- $\sin x \approx x$
- $\tan x \approx x$
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

Ці наближення є основою лінійної

теорії коливань, що описує:

- рух математичного маятника;
- коливання пружини;
- хвильові процеси (малі коливання струни, мембрани);
- електричні коливання в контурах LC.

Саме завдяки ряду Тейлора ми можемо вважати багато складних коливальних систем гармонічними. Більшість фізичних систем у рівновазі можна описати як гармонічні осцилятори. Це впливає з того, що потенціальна енергія будь-якої системи розкладається у ряд Тейлора:

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Перші два члени ряду дають квадратичне наближення, а саме:

- $U(x_0)$ — енергія в рівновазі,
- $\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ — форма параболи.

Це наближення лежить в основі: моделі пружного маятника; коливань атомів у кристалах; коливань молекул; квантового гармонічного осцилятора.

Таким чином, весь спектр коливальних явищ можна пояснити через найпростіший — квадратичний — член ряду Тейлора [1].

2. Інженерні розрахунки та моделювання технічних систем. Інженери використовують ряд Тейлора для прогнозування поведінки систем і розрахунку похибок. У техніці часто виникає потреба аналізувати та моделювати складні системи, що мають нелінійну поведінку. Пряме розв'язання таких систем зазвичай надто трудомістке або взагалі неможливе аналітично. Тому інженери широко застосовують ряд Тейлора, який дозволяє замінити складні функції їхніми поліноміальними наближеннями, оцінювати похибки та прогнозувати поведінку систем поблизу робочих режимів. Завдяки цьому підходу нелінійні моделі стають значно простішими, а отримані результати — достатньо точними для практичних задач. У кібернетиці та теорії автоматичного керування багато реальних об'єктів — реактори, двигуни, роботи, електронні схеми — описуються нелінійними рівняннями. Для аналізу системи поблизу певної робочої точки використовують розклад функції у ряд Тейлора [2].

3. Комп'ютерні обчислення. Сучасні комп'ютери виконують мільярди математичних операцій щосекунди. Однак процесори не вміють обчислювати складні функції — такі як синус, косинус, експонента чи логарифм — у прямому аналітичному вигляді. Натомість усі ці функції обчислюються наближеними методами, основою яких є ряд Тейлора або його модифіковані версії (ряд Маклорена, поліноми Чебишева, методи апроксимації Мінімаксу) [3].

Ряд Тейлора є фундаментом у побудові швидких, точних і універсальних алгоритмів обчислення математичних функцій у комп'ютерах, калькуляторах, мікроконтролерах та графічних процесорах.

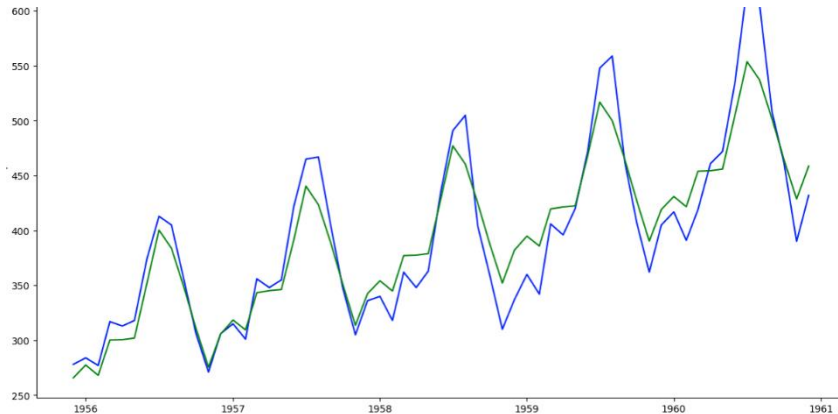
4. Економіка, фінанси та прогнозування. У сучасній економіці переважна більшість моделей є *нелінійними*: попит залежить від ціни не прямо пропорційно, інвестиції змінюються залежно від очікувань, а фінансові ринки відчутно реагують на навіть невеликі коливання параметрів. Такі залежності часто мають складну математичну форму й не піддаються прямому аналізу. Саме тут ефективним інструментом стає розклад у ряд Тейлора, який дозволяє виконувати локальні наближення й отримувати зрозумілі лінійні та квадратичні моделі. У макроекономічних моделях (наприклад, DSGE-моделях) складні нелінійні функції замінюють першими членами ряду Тейлора. Користь цього підходу полягає в тому, що:

- система рівнянь стає лінійною;

- з'являється можливість застосовувати методи лінійної алгебри;

У прогнозах моделей (наприклад, ARIMA, нелінійних регресіях) інколи потрібно оцінити поведінку функції поблизу певної точки — мінімуму, максимуму або рівноваги. Ряд Тейлора дає змогу:

- зводити складні функції втрат до квадратичної форми (що спрощує оптимізацію);
- будувати локальні тренди;
- аналізувати, чи стабільно поводить система при малих змінах параметрів [4].



5. Машинне навчання та оптимізація. У сфері штучного інтелекту, статистики та обчислювальної математики ряд Тейлора є фундаментальним інструментом для аналізу моделей, побудови алгоритмів та пошуку оптимальних рішень. Його застосування дозволяє глибше зрозуміти поведінку функцій втрат, процес навчання та збіжність методів оптимізації [5].

Усі алгоритми машинного навчання, незалежно від сфери — класифікація, регресія, нейронні мережі — ґрунтуються на мінімізації функції втрат. Але функції втрат часто складні та нелінійні, тому їх аналіз у початковій формі майже неможливий. Розклад у ряд Тейлора дозволяє:

- розуміти локальну форму функції (чи є поблизу мінімум, максимум або сідлова точка);
- оцінювати кривину функції, що визначає, наскільки швидко модель може навчитись;
- визначати вплив параметрів на результат у малих околах точки.

Наприклад, поблизу мінімуму функцію втрат часто апроксимують квадратичним поліномом — це дає змогу застосовувати ефективні методи оптимізації.

Висновки

Ряд Тейлора є фундаментальним та універсальним інструментом у математичному аналізі, що дозволяє апроксимувати складні функції простими поліномами, значно спрощуючи обчислення та моделювання.

Цей потужний інструмент допомагає вирішувати практичні завдання у різних галузях, забезпечуючи точні та ефективні наближення для чисельних методів, розв'язання диференціальних рівнянь, а також для моделювання процесів у фізиці та інженерії.

Завдяки своїй здатності лінеаризувати та спрощувати функціональні залежності, ряд Тейлора став незамінним інструментом у комп'ютерних науках, фінансовому аналізі та багатьох інших сферах людської діяльності, відкриваючи нові горизонти в розумінні та прогнозуванні складних явищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Фрактали: відкрийте всесвіт нескінченних можливостей [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://bdut.co.ua/pro-nas/fraktaly/>.

2. Розклад функцій у ряд Тейлора – навчальні матеріали КНУ [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://math.univ.kiev.ua>
3. Комп'ютерні технології: інновації, проблеми, рішення [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://conf.ztu.edu.ua/wp-content/uploads/2023/02/povnyy-tekst.pdf>
4. ВИБІР ТА ОЦІНКА ARIMA-МОДЕЛІ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://www.vestnik-econom.mgu.od.ua/journal/2017/24-2-2017/26.pdf>
5. Стратегія розвитку штучного інтелекту [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://jai.in.ua/archive/2023/ai_mono.pdf

Грушова Єва Русланівна – студентка групи 4КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: evagrusovaa@gmail.com

Походошук Катерина Валентинівна – студентка групи 4КН-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: katerinapohodosuk@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Eva Ruslanivna Grushova – student of group 4KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: evagrusovaa@gmail.com

Katerina Valentyivna Pokhodoshchuk – student of group 4KN-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: katerinapohodosuk@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95 e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com