

НЕСКІНЧЕННІСТЬ У МАТЕМАТИЦІ: ВІД ФІЛОСОФІЇ ДО СУЧАСНОЇ НАУКИ

¹Вінницький національний технічний університет

Анотація

У даній роботі досліджується еволюція концепції нескінченності у математиці. Проаналізовано перехід від її раннього, потенційного розуміння у давньогрецькій філософії до строгої актуальної формалізації, досягнутої в теорії множин Георга Кантора. Особлива увага приділяється математичним інструментам, які дозволили працювати з нескінченністю: теорії границь в аналізі та системі трансфінітних чисел.

Ключові слова: нескінченність, теорія множин, актуальна нескінченність, потенційна нескінченність, потужність множин, зліченна множина, теорія границь, гіпотеза континууму, філософія, наука.

Abstract

This paper explores the evolution of the concept of infinity in mathematics. The transition from its early, potential understanding in ancient Greek philosophy to the rigorous, actual formalization achieved in Georg Cantor's set theory is analyzed. Special attention is paid to the mathematical tools that made it possible to work with infinity: limit theory in analysis and the system of transfinite numbers.

Keywords: infinity, set theory, actual infinity, potential infinity, cardinality of sets, countable set, limit theory, continuum hypothesis, philosophy, science.

Вступ

Поняття нескінченності посідає центральне місце не лише у математиці, але й у розвитку всієї сучасної науки та філософської думки. Від перших спроб осмислити безмежність часу та простору у філософії Античності до створення суворих математичних моделей трансфінітних чисел у сучасній теорії множин, уявлення про нескінченне зазнало докорінної еволюції [1]. Якщо в епоху ранньої філософії нескінченність (як, наприклад, у апоріях Зенона) часто розглядалася як парадокс, що унеможливлює раціональне пізнання, то в сучасній науці вона стала фундаментальним інструментом.

Переломний момент настав наприкінці XIX століття завдяки роботам Георга Кантора [2]. Кантор, розробивши теорію множин, вперше надав нескінченності точний математичний зміст, довівши, що існують різні рівні нескінченності. Це досягнення, що дозволило порівнювати нескінченні множини (наприклад, множину натуральних чисел і множину дійсних чисел), стало одним із найважливіших поворотів у науковому мисленні [3]. Воно остаточно перетворило нескінченність із філософської абстракції на операціональний математичний об'єкт.

Водночас, розвиток концепції нескінченності тісно пов'язаний із вивченням фундаментальних основ математики. Створення теорії множин призвело до виникнення аксіоматичного методу та виявило глибокі внутрішні проблеми, такі як парадокси (наприклад, парадокс Рассела) та Гіпотеза континууму, що залишається нерозв'язною в рамках стандартної аксіоматики ZFC [4]. Таким чином, нескінченність продовжує бути джерелом нескінченної складності та постійного розвитку. Саме тут відбувається зближення понять філософії, логіки та сучасної математики, створюючи нове бачення природи – як системи, у якій нескінченне різноманіття форм і процесів виникає з простих закономірностей.

Актуальність теми полягає в тому, що сучасна математика, фізика та інформатика дедалі більше спираються на моделі, що включають різні аспекти нескінченності. Від теоретичної фізики (космологічні моделі, квантова теорія поля) до математичного аналізу та теорії фракталів – нескінченність виявляється універсальним явищем, що потребує глибокого аналізу [5]. Розуміння еволюції цього поняття дозволяє не лише описувати складні системи, а й виявляти глибинний порядок у нескінченній складності світу та підтримувати основи самої математики.

Об'єктом дослідження є історична, філософська та математична еволюція поняття нескінченності.

Предметом дослідження – теоретичні основи та математичні моделі (теорія множин, трансфінітні числа, математичний аналіз), які описують природу нескінченності та її взаємозв'язок із сучасними науковими дисциплінами.

Результати дослідження

1. Еволюція філософського та аналітичного розуміння нескінченності. Концепція нескінченності (∞) є однією з найбільш фундаментальних і водночас парадоксальних ідей, що формували математичну думку протягом тисячоліть [6]. Історично ставлення до нескінченності визначалося двома протилежними підходами. Довгий час домінувала ідея потенційної нескінченності (Potential Infinity), витоки якої сягають філософії Аристотеля. Цей підхід розглядав нескінченність як процес, який може необмежено продовжуватися – наприклад, процес додавання все більших натуральних чисел (1, 2, 3, ...) або нескінченне поділення відрізка, – але який ніколи не завершується у фіксованій сутності. Це дозволяло уникнути логічних парадоксів, таких як Апорії Зенона, і було основним світоглядом для більшості математиків до кінця XIX століття.

2. Перше математичне застосування нескінченності. Перше успішне, хоча й не цілком суворе, математичне застосування нескінченності відбулося з відкриттям диференціального та інтегрального числення Ісааком Ньютоном та Готфрідом Лейбніцем у XVII столітті, які оперували нескінченно малими величинами [7]. Згодом, у XIX столітті, завдяки роботам Огюстена Коші та Карла Вейерштрасса, концепція була строго формалізована за допомогою теорії границь. У рамках аналізу символ ∞ використовується для опису необмеженої поведінки функції або її аргументу, а не як числове значення. Наприклад, вираз $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ позначає, що значення функції необмежено наближається до L , коли змінна x необмежено зростає. Таким чином, аналіз успішно інтегрував потенційну нескінченність, забезпечивши обчислювальну основу для класичної механіки та фізики, але уникнувши роботи з нескінченною множиною як єдиним, завершеним об'єктом.

3. Революція Кантора: Актуальна нескінченність та ієрархія трансфінітних чисел.

Кардинальний зсув у математиці, що перетворив нескінченність на об'єкт вивчення, пов'язаний з працями Георга Кантора (кін. XIX ст.), засновника Теорії множин [8]. Кантор першим надав строгого математичного статусу актуальній нескінченності (Actual Infinity), розглядаючи нескінченну множину як цілісний, завершений об'єкт. Він ввів поняття потужності множини (cardinality) і систему трансфінітних чисел (Transfinite Numbers) для порівняння "розмірів" нескінченних множин. Найменшу нескінченну потужність, потужність множини натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Кантор назвав алеф-нуль $\aleph_0$. Множина вважається зліченною, якщо її елементи можна поставити у взаємно однозначну відповідність (бієкцію) з N . Кантор довів, що множини цілих Z та навіть раціональних Q чисел, хоч і здаються більшими, мають ту ж саму потужність: $Q = \aleph_0$. Це відкриття стало першим доказом того, що ціле може бути "однаковим" за розміром зі своєю власною частиною. Проте, використовуючи свій знаменитий діагональний метод (Cantor's Diagonal Argument), Кантор здійснив революцію, довівши, що множина дійсних чисел R є незліченною і має строго більшу потужність. Таким чином, він встановив ієрархію нескінченностей: $\aleph_0 < c$, що підтвердило існування різних "розмірів" нескінченності. Це відкриття лягло в основу Гіпотези, яка стверджує, що не існує множини, потужність якої була б більшою за $\aleph_0$ і меншою за c ($\aleph_1 = c$). Сьогодні актуальна нескінченність є невід'ємною частиною математики, зокрема, у функціональному аналізі, де нескінченновимірні простори (наприклад, Гільбертові простори) є необхідним апаратом для теоретичної фізики та квантової механіки.

Висновок

Концепція нескінченності (∞) пройшла фундаментальну трансформацію від філософської ідеї до суворої математичної структури. Математика успішно подолала багатовіковий філософський бар'єр, перейшовши від оперування потенційною нескінченністю – ідеєю незавершеного процесу, що використовувалася в теорії границь для опису необмеженої поведінки функцій в аналізі, – до формалізації актуальної нескінченності. Завдяки роботам Георга Кантора в теорії множин, нескінченність була вперше розглянута як завершений об'єкт. Кантор довів, що нескінченність не є універсальною, а має ієрархічну структуру. Це відкриття, здійснене за допомогою діагонального методу, встановило існування різних "розмірів" нескінченності, що кардинально змінило розуміння математичної реальності. Сьогодні актуальна нескінченність, закріплена в аксіоматичній теорії множин (ZFC), є не просто теоретичною абстракцією, а необхідним інструментом для побудови

складних математичних моделей, зокрема, у функціональному аналізі, де вона дозволяє працювати з нескінченновимірними просторами, критичними для теоретичної фізики. Таким чином, нескінченність остаточно перетворилася з джерела парадоксів на фундаментальну та багатогранну основу сучасної науки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Linnebo, Øystein & Shapiro, Stewart. Actual and Potential Infinity [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://pgrim.org/philosophersannual/39articles/linnebo-stewart-actual.pdf>
2. Dauben, Joseph W. Georg Cantor and the Origins of Transfinite Set Theory [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.jstor.org/stable/24968925>
3. Mason, F. Curtis. Forcing and the Independence of the Continuum Hypothesis [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Mason.pdf>
4. Fraser, Craig & Dauben, Joseph. Nonstandard Analysis, Infinitesimals, and the History of Calculus [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://cfraser.artsci.utoronto.ca/FraserDauben.pdf>
5. Borovik, Alexandre & Katz, Mikhail. Who Gave You the Cauchy–Weierstrass Tale? The Dual History of Analysis and Infinitesimals [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-011-9235-x>
6. Katz, Mikhail. From Pythagoreans and Weierstraßians to True Infinitesimal-Calculus [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1368&context=jhm>
7. Mueckenheim, Wolfgang. The Meaning of Infinity [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/math/0403238>
8. Zheng, Yaming. The Continuum Hypothesis: Its Independence from Zermelo-Fraenkel Set Theory and Impact on Mathematical Foundations [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/376075789_The_continuum_hypothesis_its_independence_from_Zermelo-Fraenkel_set_theory_and_impact_on_mathematical_foundations

Янківська Богдана Анатоліївна – студентка групи 2КН-246, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: bjankivska@gmail.com

Мількевич Діана Володимирівна – студентка групи 4КН-246, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: milkevic31@gmail.com

Науковий керівник: **Ковальчук Майя Борисівна** — д.пед.н., доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Yankivska Bohdana Anatoliivna – student of group 2CS-24b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: bjankivska@gmail.com

Milkevych Diana Volodymyrivna – student of group 4CS-24b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: milkevic31@gmail.com

Supervisor: **Kovalchuk Maya B.** — Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com