

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглядається застосування диференціалів для наближених обчислень значень функцій. Описано поняття диференціалу функції та показаний процес виведення формули наближених обчислень. Запропоновано алгоритм наближеного обчислення значення функції в точці. Наведені приклади обчислень за алгоритмом, що доводить що даний метод працює.

Ключові слова: диференціальне числення, диференціювання функції, диференціал, наближені обчислення.

Abstract

The report explores the application of differentials for approximate calculations of function values. Describes the term function differentiation and the process of deriving the formula for approximate calculations. Proposes an algorithm for approximating the value of a function at a point. Provides examples of calculations using the algorithm, demonstrating that the method is effective.

Keywords: differential calculus, function differentiation, differential, approximate calculations.

Вступ

При наближених обчисленнях швидкість обчислення є важливим критерієм. Один із методів наближених обчислень значень функцій є використання диференціалів. За допомогою цього методу можна швидко отримати приблизні значення функції в точці. У цій статті розглядається основи використання диференціалів для наближених обчислень та описаний алгоритм їх застосування. Наведені приклади застосування цього методу для оцінки його ефективності.

Диференціал функції

Нехай на деякому проміжку (a, b) дано функцію $y = F(x)$, яка в точці x_0 є диференційована, тобто в точці x_0 існує похідна $F'(x)$. Тоді існує окіл точки $\Delta x = 0$, який належить проміжку (a, b) такий, що для всіх значень Δx з цього околу, крім $\Delta x = 0$, справджується рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. [1]

Помноживши обидві частини рівності на Δx ($\Delta x \neq 0$), отримаємо формулу приросту диференційованої функції

$$\Delta y = F'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

Диференціалом функції в точці називається добуток похідної функції на приріст її аргументу та позначається $dy = F'(x_0) \cdot \Delta x$. [1]

Диференціалом аргументу називають його приріст, тобто вважають, що $dx = \Delta x$. [1]

Формулу (1) можна переписати, використовуючи диференціали

$$\Delta y = dy + \alpha(dx) \cdot dx \quad (2)$$

Диференціал для наближених обчислень

При наближених обчисленнях у формулі (2) можна позбутися $\alpha(dx) \cdot dx$, адже $\alpha(dx) \rightarrow 0$ та $dx \rightarrow 0$, маємо $\Delta y \approx dy$, причому точність цієї наближення збільшується при зменшенні приросту аргумента Δx . [2]

Підставимо значення приросту функції $\Delta y = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$ та диференціалу функції $dy = F'(x_0) \cdot \Delta x$ у формулу (2), отримаємо

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \approx dy \Rightarrow \\ \Rightarrow F(x_0 + \Delta x) \approx F(x_0) + F'(x_0) \cdot \Delta x \quad (3)$$

(3) - формула наближених обчислень функції $y = F(x)$ в точці $x_0 + \Delta x$. [2]

Для ефективного використання формули (3) слід дотримуватись таких правил:

1. Значення функції $F(x_0)$ можна обчислити точно. [2]
2. Приріст аргументу може бути як і додатнім $\Delta x > 0$, так і від'ємним $\Delta x < 0$, але Δx повинен бути хоча б у 10 разів менше за x_0 . [2]

Алгоритм наближеного обчислення значення функції $y = F(x)$ в точці x_1 за допомогою диференціалів:

1. Вибрати значення аргументу x_0 , що близьке до заданого значення x_1 . [2, 3]
2. Обчислити значення функції $y = F(x)$ у точці x_0 : $y_0 = F(x_0)$. [2, 3]
3. Знайти похідну функції $y = F(x)$: $y' = F'(x)$. [2, 3]
4. Обчислити значення похідної функції $y' = F'(x)$ в точці x_0 : $y'_0 = F'(x_0)$. [2, 3]
5. Обчислити приріст аргументу $\Delta x = x_1 - x_0$. [2, 3]
6. Обчислити наближене значення функції $y = F(x)$ в точці x_1 : $F(x_1) \approx y_0 + y'_0 \cdot \Delta x$. [2, 3]

Приклади наближених обчислень

Розглянемо приклад наближеного обчислення степеневі функції $1,95^4$. [3]

Дана функція в загальному вигляді записується x^4 .

Значення 2 в степені 4 можна обчислити точно, тому виберемо $x_0 = 2$.

Обчислимо значення функції x^4 у точці $x_0 = 2$: $y_0 = 2^4 = 16$.

Знайдемо похідну функції x^4 : $y'_0 = (x^4)' = 4x^3$.

Обчислимо значення похідної функції $y' = 4x^3$ в точці $x_0 = 2$: $y'_0 = 4 \cdot 2^3 = 32$.

Обчислимо приріст аргументу $\Delta x = 1,95 - 2 = -0,05$.

Обчислити наближене значення функції $y = x^4$ в точці $x_1 = 1,95$:

$$1,95^4 \approx 16 + 32 \cdot (-0,05) = 16 - 160 \cdot 0,01 = 14,4.$$

Точне значення $1,95^4 = 14.45900625$.

Отже відносна похибка обчислення дорівнює $|\frac{14,4}{14.45900625} - 1| \cdot 100\% = 0.4080934\%$.

Розглянемо приклад наближеного обчислення кубічного кореня $\sqrt[3]{8,03}$. [3]

Дана функція в загальному вигляді записується $\sqrt[3]{x}$.

Значення кубічного кореня із 8 можна обчислити точно, тому виберемо $x_0 = 8$.

Обчислимо значення функції $\sqrt[3]{x}$ у точці $x_0 = 8$: $y_0 = \sqrt[3]{8} = 2$.

Знайдемо похідну функції $\sqrt[3]{x}$: $y'_0 = (x^{\frac{1}{3}})' = 3^{-1} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = (3\sqrt[3]{x^2})^{-1}$.

Обчислимо значення похідної функції $y' = (3\sqrt[3]{x^2})^{-1}$ в точці $x_0 = 8$:

$$y'_0 = (3\sqrt[3]{8^2})^{-1} = (3 \cdot 2^2)^{-1} = 12^{-1}.$$

Обчислимо приріст аргументу $\Delta x = 8,03 - 8 = 0,03$.

Обчислити наближене значення функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x_1 = 8,03$:

$$\sqrt[3]{8,03} \approx 2 + 12^{-1} \cdot 0,03 = 2 + 0,01 \cdot 4^{-1} = 2 + 400^{-1} = 2,0025.$$

Точніше значення $\sqrt[3]{8,03} \approx 2,00249688149$.

Отже відносна похибка обчислення дорівнює $|\frac{2,0025}{2,00249688149} - 1| \cdot 100\% = 0,00015\%$.

Висновки

У результаті розв'язання прикладів, було підтверджено, що похибка наближених обчислень зменшується при зменшенні приросту аргументу. Метод використання диференціалів для наближених обчислень зручний та ефективний, оскільки він зазвичай використовує цілі числа при розрахунках, а дійсні числа використовуються на останньому кроці. Це дозволяє зменшити кількість помилок та полегшити обчислення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Польгун К. В. Диференціальне числення функції однієї змінної (компетентнісний підхід), 2019. 112 с.
2. Денисенко Н. Л., Срьоміна Т. О., Могильова В. В. Вища математика. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Практикум, 2022. 159 с.
3. Strang G., Herman E. Calculus Volume 1, 2016. 867 с.

Ремовський Юрій Андрійович - студент групи 2ПКТ-24б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: removskiy.edu@gmail.com

Науковий керівник: **Хом'юк Ірина Володимирівна** - д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, email: vikiraivh@gmail.com

Removskiy Yurii Andriyovych - student of group 2PKT-24b, Faculty of Intellectual Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: removskiy.edu@gmail.com

Supervisor: **Khomyuk Irina Volodymyrivna** - Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: vikiraivh@gmail.com