

ЛОГІЧНА СХЕМА ЛАТИНСЬКОГО КВАДРАТА КВАЗІГРУПИ КЛЯЙНА

Вінницький національний технічний університет

Анотація. У роботі досліджено процес побудови логічних функцій на основі квазігрупової операції, зокрема використанням латинського квадрата на основі квазігрупи Кляйна. Наведено побудову логічних виразів функцій z_1 та z_2 , виконано їхню спрощену булеву реалізацію. Оцінено апаратну складність побудованої логічної схеми на основі кількості логічних елементів та їхньої оцінки в умовних одиницях GE. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації апаратної реалізації логічних схем.

Ключові слова: латинський квадрат, квазігрупа Кляйна, Булева функція, ізоморфізм, таблиця істинності, логічна схема.

Abstract. The work investigates the process of constructing logical functions based on a quasigroup operation, in particular using a Latin square based on a Klein quasigroup. The construction of logical expressions of the functions z_1 and z_2 is presented, and their simplified Boolean implementation is performed. The hardware complexity of the constructed logical circuit is estimated based on the number of logical elements and their evaluation in conventional units GE. The results obtained can be used to optimize the hardware implementation of logical circuits.

Keywords: Latin square, Klein quasigroup, Boolean function, isomorphism, truth table, logic diagram.

Вступ

Сучасна теорія кодування та побудови логічних схем усе частіше звертається до використання алгебричних структур, зокрема квазігруп, для формального опису та реалізації функційних залежностей. Однією з простих, але водночас показових квазігруп є квазігрупа Кляйна, яка може бути зручно подана у вигляді латинського квадрата. Завдяки властивостям цієї квазігрупи можна побудувати логічну функцію, що має високий рівень симетрії та може бути ефективно реалізовано апаратно.

Метою роботи є побудова логічних виразів для функцій, отриманих із латинського квадрата ізоморфної квазігрупи Кляйна та оцінки апаратної складності цих функцій

Результати дослідження

Розглянемо квазігрупу Кляйна – таку алгебричну структуру, що має цікаві властивості симетрії та ізоморфізму, які роблять її зручною для формального опису і реалізації функційних залежностей. Її таблиця Келі перша в таблиці 1, внутрішня частина її це нормалізований латинський квадрат, в якого перший рядок та перший стовпець нумеровані в лексикографічному порядку. Друга таблиця Келі в таблиці 1 – ізоморфна квазігрупа до квазігрупи Кляйна, де внутрішня частина її це латинський квадрат з точністю до ізоморфізму $(0123) \rightarrow (3201)$. Нагадаємо, що латинським квадратом називають квадратну таблицю, в якій кожен елемент з'являється точно один раз у кожному рядку та кожному стовпці.

°	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

*	0	1	2	3
0	3	2	0	1
1	2	3	1	0
2	0	1	3	2
3	1	0	2	3

Таблиця 1. Ізоморфні квазігрупи Кляйна у вигляді таблиць Келі.

Подамо другу квазігрупу з таблиці 1 через двійкові зображення елементів, що

спрощують обчислення (таблиця 2).

(*)	00	01	10	11
00	11	10	00	01
01	10	11	01	00
10	00	01	11	10
11	01	00	10	11

Таблиця 2 – Двійкове зображення ізоморфної квазігрупи Кляйна

У таблиці 3 побудовано таблицю істинності, де змінні позначаються як (x_1, x_2, y_1, y_2) , а значення (z_1, z_2) утворюють вихідну операцію, де $z_1 = x_1 y_1$ та $z_2 = x_2 y_2$:

	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2
0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1
4	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1
7	0	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1
11	1	0	1	1	1	0
12	1	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	0	0
14	1	1	1	0	1	0
15	1	1	1	1	1	1

Таблиця 3 – Таблиця істинності ізоморфної квазігрупи Кляйна

З таблиці 3 визначено векторні множини значень вихідних змінних:

$$z_1 = V_1(0, 1, 4, 5, 10, 11, 14, 15), \quad z_2 = V_2(0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)$$

Враховуючи отримані значення істинності векторних множин, за діаграмою Вейча з таблиці 4 побудовано карти Карно для z_1 та z_2 .

	x_2	x_2	$\overline{x_2}$	$\overline{x_2}$	
x_1	12	13	9	8	$\overline{y_1}$
x_1	14	15	11	10	y_1
$\overline{x_1}$	6	7	3	2	y_1
$\overline{x_1}$	4	5	1	0	$\overline{y_1}$
	$\overline{y_2}$	y_2	y_2	$\overline{y_2}$	

Таблиця 4 – Діаграма Вейча

Нагадаємо, що діаграма Вейча – це один з графічних методів зображення булевих функцій, розгортка n-вимірного куба на площині, де кожна клітинка відповідає певному набору вхідних змінних булевої функції з таблиці істинності. Карта Карно – це вдосконалення діаграм Вейча. Основна відмінність карт Карно полягає в тому, що розташування клітинок відповідає коду Грея, де сусідні клітинки відрізняються лише значенням однієї змінної. Це полегшує візуальне виявлення термів, які можна об'єднати. На основі отриманих результатів побудовано у таблиці 5 відповідні карти Карно для z_1 та z_2 :

z_1	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	
x_1					$\bar{y}_1$
x_1	1	1	1	1	y_1
$\bar{x}_1$					y_1
$\bar{x}_1$	1	1	1	1	$\bar{y}_1$
	$\bar{y}_2$	y_2	y_2	$\bar{y}_2$	

z_2	x_2	x_2	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	
x_1	1		1		$\bar{y}_1$
x_1		1		1	y_1
$\bar{x}_1$	1		1		y_1
$\bar{x}_1$		1		1	$\bar{y}_1$
	$\bar{y}_2$	y_2	y_2	$\bar{y}_2$	

Таблиця 5 – Карты Карно для z_1 та z_2

За методами булевої алгебри сформовано логічні функції, які спрощено методом Квайна-МакКласкі [1] – метод мінімізації алгебричним підходом для спрощення булевих виразів, що включає розбиття на блоки і поєднання однакових мінімальних та максимальних термів. З першої карти Карно з таблиці 5, враховуючи закон $ab \vee \bar{a}\bar{b} = a \oplus b$, де $(\oplus)$ відповідає операції XOR, маємо формулу:

$$z_1 = x_1 y_1 \vee \bar{x}_1 \bar{y}_1 = x_1 \oplus y_1$$

З другої карти Карно, з таблиці 5, маємо формулу:

$$z_2 = x_1 x_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 y_2 \vee x_1 x_2 y_1 y_2 \vee x_1 \bar{x}_2 y_1 \bar{y}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 y_1 \bar{y}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 y_1 y_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{y}_1 y_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2$$

Винесемо спільне за дужки, в результаті маємо:

$$z_2 = x_1 x_2 (\bar{y}_1 \bar{y}_2 \vee y_1 y_2) \vee \bar{x}_2 \bar{y}_1 (x_1 y_2 \vee \bar{x}_1 \bar{y}_2) \vee \bar{x}_2 y_1 (x_1 \bar{y}_2 \vee \bar{x}_1 y_2) \vee \bar{x}_1 x_2 (y_1 \bar{y}_2 \vee \bar{y}_1 y_2)$$

За законом $ab \vee \bar{a}\bar{b} = a \oplus b$ в дужках, отримуємо

$$z_2 = x_1 x_2 (y_1 \oplus y_2) \vee \bar{x}_2 \bar{y}_1 (x_1 \oplus y_2) \vee \bar{x}_2 y_1 (x_1 \oplus y_2) \vee \bar{x}_1 x_2 (y_1 \oplus y_2)$$

Звідси винесемо спільне за дужки:

$$z_2 = x_2 (x_1 (y_1 \oplus y_2) \vee \bar{x}_1 (y_1 \oplus y_2)) \vee \bar{x}_2 (\bar{y}_1 (x_1 \oplus y_2) \vee y_1 (x_1 \oplus y_2))$$

За правилами алгебри логіки, отримуємо

$$z_2 = x_2 (x_1 \oplus (y_1 \oplus y_2)) \vee \bar{x}_2 (\bar{y}_1 \oplus (x_1 \oplus y_2))$$

Оскільки операція $(\oplus)$ асоціативна і комутативна, то маємо

$$z_2 = x_2 \oplus (y_1 \oplus (x_1 \oplus y_2))$$

Отже, квазігрупа Кляйна має дві логічні формули для z_1 та z_2 :

$$L = (z_1; z_2) = (\overline{x_1 \oplus y_1}; \overline{x_2 \oplus (y_1 \oplus (x_1 \oplus y_2))})$$

Для реалізації логічної функції, отриманої на основі побудови латинського квадрата до квазігрупи Кляйна, виконано обчислення використаних логічних елементів і проведено оцінку загальної апаратної складності в умовних одиницях GE – це умовна одиниця вимірювання, що використовується для оцінки апаратної складності електронної схеми [3].

Загальна апаратна складність реалізації логіки ізоморфного латинського квадрата квазігрупи Кляйна складається з 2 операцій NOT і 4 операцій XOR(2), кожна з яких, відповідно до стандарту [3] має складність 0,67GE та 2,67GE, що разом становить загальну умовну оцінку $z_1 + z_2 = 12,02$ GE.

Висновки

У результаті дослідження було розглянуто процес побудови логічних функцій на основі операцій із використанням алгебричних структур, зокрема квазігрупи Кляйна. Застосування латинських квадратів для представлення квазігрупи дозволило не лише сформулювати компактні логічні функції, але й оптимізувати їх реалізацію за допомогою методу мінімізації за Квайна-МакКласкі. Це, у свою чергу, сприяло зменшенню апаратної складності, яка була оцінена у 12,02 умовних одиниць GE.

Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні цифрових пристроїв, де важливо забезпечити симетричну, уніфіковану логічну структуру з помірною апаратною складністю.

Список використаних джерел

1. Сохаський Ф.М., Крайнічук Г.В., Лужецький В.А., Канонічне та матричне подання квазігруп четвертого порядку // Проблеми та застосування механіки та математики, – Львів, ІПММ ім. Я.С. Підстригача, – 2024. – №22. – С. 95-105.
2. Н.Р. Кондратенко, А.В. Остапенко-Боженова Глави дискретної математики з питань захисту інформації. // Псібник: офіційне видання, ВНТУ – 2022. – 89с.
3. Virtual Silicon. Standard cell library UMCL18G212T3 based on the UMC L180 0.18 μ m 1P6M Logic process. Official release, – 2004, p.1.

Остафійчук Дмитро Володимирович — студент групи 2БС-236, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: osdima48@gmail.com

Крайнічук (Шелепало) Галина Василівна — к. ф.-м. н, доцент кафедри захисту інформації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, email: hv.shelepalo@vntu.edu.ua

Ostafiychuk Dmytro Volodymyrovych — student of group 2BS-23b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: osdima48@gmail.com

Kraynichuk (Shelepalo) Halyna Vasylivna — Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Information Protection, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: hv.shelepalo@vntu.edu.ua